SAMPŪRṆĀNANDA-GRANTHAMĀLĀ

(*Vol. 10*)

Chief Editor

DR. BHĀGĪRATHA PRASĀDA TRIPĀṬHĪ 'VĀGĪŚA ŚĀSTRĪ'
Director, Research Institute,
Sampurnanand Sanskrit Vishvavidyalaya,
Varanasi



SARALATRIKOṆAMITI

by

M. M. BĀPŪDEVA ŚĀSTRĪ

Edited by

Pt. GOVINDA PĀṬHAKA

DEPARTMENT OF PAÑCĀṄGA

Sampurnanand Sanskrit Vishvavidyalaya

VARANASI
1977

Published by—
Director, Research Institute,
Sampurnanand Sanskrit Vishvavidyalaya,
Varanasi.

Available at—
Publication Section
Sampurnanand Sanskrit Vishvavidyalaya,
Varanasi–221002.

Printed : 1100 Copies
Price : 29-00 p.

Printed by—
G. S. Upadhyaya
Manager
Sampurnanand Sanskrit Vishvavidyalaya Press,
Varanasi

सम्पूर्णानन्द-ग्रन्थमाला
(१०)

मुख्यसम्पादकः
डॉ० भागीरथप्रसादत्रिपाठी 'वागीशः शास्त्री'
अनुसन्धानसंस्थाननिदेशकः
सम्पूर्णानन्दसंस्कृतविश्वविद्यालये



म० म० बापूदेवशास्त्रिकृता

सरलत्रिकोणमितिः

सम्पादकः
प० गोविन्दपाठकः
पञ्चाङ्गविभागः
सम्पूर्णानन्द-संस्कृत-विश्वविद्यालयः

वाराणस्याम्

२०३४ तमे वैक्रमाब्दे १८९९ तमे शकाब्दे १९७७ तमे ख्रैस्ताब्दे

प्रकाशकः,
निदेशकः, अनुसन्धानसंस्थानस्य
सम्पूर्णानन्द-संस्कृत-विश्वविद्यालयः
वाराणसी ।

प्राप्तिस्थानम्—
प्रकाशनविभागः
सम्पूर्णानन्दसंस्कृतविश्वविद्यालयः
वाराणसी-२२१००२.

मुद्रितानि : ११०० प्रतिरूपाणि
मूल्यम् : २६-०० रूप्यकाणि

मुद्रकः
घनश्याम उपाध्यायः
मुद्रणालयव्यवस्थापकः
सम्पूर्णानन्दसंस्कृतविश्वविद्यालयः,
वाराणसी ।

प्रास्ताविकम्

साम्प्रतिके गणितशास्त्रे त्रिकोणमितिर्गणितस्य मुख्यं कार्यमस्ति त्रिभुजानां भुजकोण-मापनम्। तन्मिथः संबन्धोपलब्धिरपि तदुद्देश्यं विद्यते। प्राचीने काले तु विश्वस्मिन्नपि जगति त्रिकोणमितिर्ज्योतिषविद्यासहचरतया प्रादुरभूत्। कतिवादनवेला सम्प्रति जायत इति दिवससमयज्ञानाय पुरातने काले सूर्यघटीयन्त्रमाविष्कृतमभूद् भारतेऽन्यत्र चापि। तत्रादौ निखन्यमानस्य कीलकस्य शलाकाया वा छायादर्शनेन समयमवगच्छन्ति स्म विद्वांसः। तस्य कीलकस्य सूर्यस्य च च्छायया त्रिकोणाकृतिः संजायते। तत एव त्रिकोणमितेः प्रक्रमोऽभ्यु-पेतव्यः। ख्रीस्ताब्दात् सहस्राधिकहायनेभ्योऽपि प्राग् भारते वर्षे यत्किञ्चित्प्रकारकं घटी-यन्त्रमाविष्कृतमासीदेवेति शुल्बसूत्रेषु बहुत्र कीलकोल्लेखादभिधातुं शक्यते।

सूर्यसिद्धान्त इत्याख्यो भारतीयज्योतिषशास्त्रग्रन्थः प्राचीनतमो मन्यते। पाश्चात्य-देशीया विद्वांसस्तु ग्रन्थममुं ख्रीस्ताब्दात् परतो विरचितमुररीकुर्वन्ति। अस्मिन् ग्रन्थेऽर्धज्यानां सारण्यः प्रदर्शिता इति तस्मिन् काले भारतीयानां त्रिकोणमितीयज्ञानमभिव्यज्यते। सूर्यघटी-यन्त्रकालेन ततो मनाक् प्रागेव भवितव्यम्।

भवतु नाम सूर्यघटीनिर्माणस्य कालो बहुषु देशेषु सहस्राधिकवर्षेभ्यः प्राग्वर्ती। किन्तु त्रिकोणमितीयस्य फलनत्रयस्य प्रथमा परिभाषा खलु स्पष्टतो भारतीयैरेव बुधैः कृता समा-साद्यते। सर्वतः प्रथममार्यभटेन प्रायोजि ज्याशब्दः। भारतादरबदेशं गतोऽयं 'ज्या'-शब्दस्तत्र विकृतिमापाद्यमानः 'जीवा'-रूपेण प्रचालितः। परत एष पुनर्विकारमुपेयमानः 'जैब' इति वक्षःस्थलार्थकं रूपं समाश्रितः। आर्यभटीयकालतः षट्शताब्दानन्तरम् आरब्य-भाषामयानां ग्रन्थानां लैटिनभाषया कृतेऽनुवादे वक्षःस्थलार्थके जैबशब्दस्थाने प्रयुक्तस्तदर्थक एव 'साइनस'-शब्दः। इत्थं यद्यपि 'त्रिकोणमिति'-शब्दस्य नामतः प्रयोगो नोपलभ्यते भार-तीयज्योतिषग्रन्थेषु, तथापि त्रिकोणमितेरुपजीव्य आर्यभटप्रयुक्तो ज्याशब्द एवेति शक्यते वक्तुं ध्रुवम्।

'उत्क्रमज्या'-शब्दतो ज्याशब्दस्य स्पष्टत आन्तर्यसाधनाय ब्रह्मगुप्तेन ज्यार्थकः 'क्रमज्या'-शब्दः प्रयुक्तः। परतोऽयं शब्द आरब्यभाषाया 'करज' इत्येवं प्रचलितोऽभूत्। एतस्य बहूनि विकृतान्यपि रूपाणि प्रथितान्यभूवन्, यथा—करदग, करदज, करकय, गरगग इत्यादीनि।

इत्थं तावद् 'ज्या', 'कोटिज्या', 'उत्क्रमज्या' इति फलनत्रयं सुस्पष्टं प्रयुक्तं भारतीयज्योतिर्विद्भिः। आर्यभटेन तु यद्यपि सारण्योऽपि निर्दशिताः, तथापि तदतिरिक्ता

अन्येऽनुपातास्तेन स्पष्टतः क्वापि न प्रदर्शिताः। यद्यपि सूर्यसिद्धान्ते ज्या-कोज्यादीनां भजनफलं प्रयुक्तम्, तथापि तत्र तदीयं किमपि स्वतन्त्रं नामधेय न सूचितम्।

यद्यपि सूर्यसिद्धान्तादिग्रन्थेषु छायाव्यवहारसंबन्धीनि प्रकरणानि वर्तन्ते, तथापि तत्र 'स्पज्या' 'कोस्पज्या' इत्याख्ययोऽनुपाताः फलनतया न निर्दिष्टाः। यूरपदेशे थेलसनामकेन विदुषा सर्वतः प्रथममुक्ता अनुपाताः फलनत्वेन निरूपिताः। छायासारणी तु आरब्याभिजनेन विदुषाऽलबत्तानीनामकेन विरचिता दशमे खीस्तशताब्दे। पञ्चदशे खीस्तशताब्दे 'व्युज्या' 'व्युकोज्या' इति फलनद्वयस्य सारणीषु समुल्लेखः प्रारब्धः।

सप्तदशे खीस्तशताब्दे जयसिंहाज्ञया जगन्नाथसम्राजा ज्याचापरेखागणितादियुतः 'सिद्धान्तसम्राट्' इत्याख्यो ग्रन्थो मिजस्तीग्रन्थस्य सहायतया विरचितः। तस्मिन्नेव समय आरब्यभाषातो नयनसुखोपाध्यायेनानूदित 'उकरा' इत्याख्यो ग्रन्थश्चापीयत्रिकोणमितिविषयकः। सम्प्रति स सम्पूर्णानन्दसंस्कृतविश्वविद्यालयात् प्रकाश्यते।

आङ्ग्लैः शासिते भारते वर्षे ज्योतिर्विद्भिः पाश्चात्यपद्धतिरपि हस्तामलकीकृता गणितविद्यायाः। तादृशेषु विद्वत्पुङ्गवेषु बापूदेवशास्त्रीत्याख्यो नृसिंहदेवनामाऽन्यतम एकोनविंशखीस्तशताब्दस्य प्रथमे चरणे (१-११-१८२१ ई०) जनि लेभे। एल्० विल्किन्स् महदयो बापूदेवशास्त्रिणो गणितशास्त्रे वैशारद्यं विभाव्य तं सिहोरस्थसस्कृतपाठशालायां रेखागणिते नैपुण्यासादनाय प्रेषितवान्। परतस्तेनैवायं काशीसंस्कृतपाठशालायां रेखागणिताध्यापकत्वेन नियोजितः। म० म० बापूदेवशास्त्रिणा प्राच्यपाश्चात्त्योभयगणितविद्यामन्थनपूर्वकं बहूनि ग्रन्थरत्नानि विरचय्य भृशमुपकृतं सस्कृतजगत्। गीर्वाणवाण्यां साद्यस्कज्ञानसंभृतेरभावसूचकैरयं सरलत्रिकोणमितिग्रन्थोऽवश्यं परिशीलनीयः।

Logarithms इति शब्दो भारतीयैर्गणितशास्त्रविद्भिः संस्कृतग्रन्थेषु क्वापि नोपयोजितः। म० म० बापूदेवशास्त्रिणा प्रघातमापक-नाम्नाऽयं प्रयुक्त इहैव सरलत्रिकोणमितौ। म० म० सुधाकरद्विवेदिना तु स्वकीये दीर्घवृत्तलक्षणाख्ये ग्रन्थे ध्वनिसाम्यं बिभ्रतो 'लघुरिक्थ' इति शब्दस्य प्रयोगः Logarithms इति शब्दस्थाने विहितः, तज्ज्ञानविधिश्चापि प्रदर्शितः। सप्तदशे खीस्तशताब्दे सर्वतः प्रथमं पिटिस्कस (Pitiscus) इत्याख्येन विदुषा त्रिकोणमितिसारण्यां दशमलव-(Decimel)-व्यवहारः प्रवर्तित इति क्यांटरमतम्। म० म० बापूदेवशास्त्रिणः कालात् संस्कृतग्रन्थेष्वपि दशमलवशब्दो व्यवहारपद्यामारूढः।

शास्त्रिवर्यः संस्कृतभाषावद् आङ्ग्लभाषायामपि समानाधिकारोऽभूदिति तेन १८६० खीस्ताब्दे सूर्यसिद्धान्त आङ्ग्लभाषयाऽनूदितः। स च 'बिब्लिओथिका इण्डिका' इत्यत्र प्रकाशितः। १८६१ खीस्ताब्दे तदीयो गोलाध्यायस्याङ्ग्लभाषानुवादोऽपि तत्रैव प्रकाशमुपेतः। एतदीयपरम्पराका बहवः शिष्या अभूवन्। श्रीशास्त्रिवर्यस्य निर्देशेनैव श्रीनीलाम्बरशर्मणा पाश्चात्यपद्धतिमनुसृत्य संस्कृतेन 'गोलप्रकाशः' इत्याख्यो विरचितो ग्रन्थः।

श्रीबापूदेवशास्त्रिवर्यस्य १. रेखागणितम्, २. त्रिकोणमितिः, ३. सायनवादः, ४. प्राचीनज्योतिषाचार्याशयवर्णनम्, ५. अष्टादशविचित्रप्रश्नसंग्रहः, ६. तत्त्वविवेकपरीक्षा, ७. मानमन्दिरस्थयन्त्रवर्णनम्, ८. अङ्कगणितं चेत्यष्टौ संस्कृतभाषामयाः प्रकाशिता ग्रन्था अद्यापि तदीयं यशो गायन्ति। तेनैव प्रवर्तितं दृग्गणितपञ्चाङ्गम् अद्यापि सम्पूर्णानन्द-संस्कृतविश्वविद्यालयात् प्रत्यब्दं प्रकाशमानीयते। पञ्चाङ्गमिदम् आङ्गलदेशीयनाटिकल-आल्मनाक इत्यस्याधारेण प्रक्रियते। सायनगणनाया विषये १८६३ खीस्ताब्दे शास्त्रिवर्येण कश्चिल्लेख आङ्गलभाषया प्रास्तावि।

म० म० बापूदेवशास्त्री देशेषु विदेशेषु चातिमात्रं सम्मानितः। स खलु ग्रेटब्रिटेनस्य आयरलैण्डदेशस्य च 'रायल एशियाटिक सोसाइटी' इति संस्थाभ्यां १८६४ खीस्ताब्दे, वङ्गदेशस्य तु 'एशियाटिक सोसाइटी' इत्यनया संस्थया १८६८ खीस्ताब्दे समादृत-सदस्यत्वेन वृतोऽभूत्। ततः कालिकाताविश्वविद्यालयस्य इलाहाबादविश्वविद्यालयस्य च वृतः पारिषद (Fellow)। आङ्गलशासनपक्षतः शास्त्रिवर्यः १८७८ खीस्ताब्दे सी. आई. ई. इत्युपाधिना समलङ्कृतोऽभूत्। १८८७ खीस्ताब्दे चासौ विक्टोरिया-महाराज्ञ्याः शताब्दोत्सवावसरे महामहोपाध्याय इत्युपाधिना विभूषितोऽभूत्। एकदा जम्मूभूपतिनाऽयं चन्द्रग्रहणस्य स्पर्शवेलायां यथायथं बोधितायां मुद्रासहस्रेण सभाजितः।

तस्यायं प्राच्यपाश्चात्योभयगणितविद्यामन्थनोदितः सरलत्रिकोणमितिनामको ग्रन्थस्तत्पुत्रेण स्वनामधन्येन श्रीगणपतिदेवशास्त्रिणा शिवसायुज्यलाभात् प्राक् सम्पूर्णानन्द-संस्कृतविश्वविद्यालयाय समर्पितः। एष चिराद् ज्योतिषपरीक्षाया निर्धारितो वर्तते। म० म० बापूदेवशास्त्रिपरामर्शतो रचितः प्राच्यपाश्चात्यगणितविद्याविमर्शात्मको गोलप्रकाशस्तु गोलीयरेखागणितं चापीयत्रिकोणगणितं चाधिकृत्य वर्तत इति सरलत्रिकोणमितिरियं तद्विषयभिन्नापि तदापनरूपा विशकलिता। यद्यपीह मङ्गलाचरणश्लोके सरलशब्दो नास्ति निर्दिष्टः, तथापि साधारण्यात् सरलत्रिकोणमितिरित्येव नामधेयमस्य ग्रन्थस्या-भ्युपेतव्यम्। इह विद्यार्थिनामुपकाराय प्रत्यध्यायमभ्यासार्थमुदाहरणानि विन्यस्तानि सन्ति। चतुर्थाध्याये तु तानि विषयवैषम्याद् द्विरुपस्थापितानि। पर्यन्ते परीक्षार्थिजनोपकारार्थं प्रक्रमोक्तप्रश्नानामुत्तराणि प्रस्तुत्य भृशमुपकृतो विद्यार्थिव्रजः शास्त्रिवर्येण। ग्रन्थे बहूनि चक्राणि क्षेत्राणि च यथास्थानं प्रदर्शितानि। स्थाने स्थाने टिप्पणीरुल्लिख्य विषयः सरलीकृतः।

इह भारतीयान् वैदेशिकांश्च गणिताचार्यान् बहुत्र समुद्धृत्य नूतनविषयांश्च निर्दिश्य मन्थनपूर्वकं विरचितस्यास्य ग्रन्थस्य कस्माच्चिदपि गवेषणाग्रन्थाद् ज्यायस्त्वमेव सिध्यति। भास्कराचार्यः (२३, ३२, ३४, ८२ पृ०), घातपक्षः (२४ पृ० टिप्पण्याम्), प्रघातमापक-रूपम् (१२७ पृ०) डे मायवराख्यगणकसिद्धान्तः (३१ पृ० टि०), प्रतिसमीकरणम् (३४ पृ० टि०), चेम्बर्संघाताङ्कसारणी (४६, ४८, ६०, ६१), रेखागणितम् (६७, ६८,

१२७, पृ०), ब्रह्मगुप्तः (७१ पृ०), मत्कृत क्रोडग्रन्थः (७१ पृ०), श्रीपत्युक्तम् (७२ पृ०), पूर्वाचार्यैः स्वग्रन्थेषु साधितम् (७६ पृ०), ग्रीकवर्णमालायाः पाई (८० पृ० टि०), लीलावती (८० पृ० टि०) क्षेत्रमितिः (१२१ पृ०) इत्यादयः समुद्धृता आचार्या ग्रन्था विषयाश्चोभयविधपद्धतिमभिव्यञ्जन्ति ।

म० म० बापूदेवशास्त्रिपरम्पराकेण श्रीगणपतिदेवशास्त्रिणः शिष्येष्वन्यतमेन सम्पूर्णानन्दसंस्कृतविश्वविद्यालयात् प्रतिहायनं प्रकाश्यमानस्य दृग्गणितपञ्चाङ्गस्य सम्पादकेन पण्डितगोविन्दपाठकेन सप्रणिधानं भूमिकादिना भूषयित्वा सम्पादितोऽयं सरलत्रिकोणमिति-ग्रन्थः संस्कृतज्ञगणितज्ञाना प्रीणनाय जिज्ञासूना च महोपकाराय सेत्स्यतीति ध्रुवं प्रत्येति ।

कार्तिकपूर्णिमायाम्
२०३४ वै०
(भृगौ २५-११-७७ खी०)

भागीरथप्रसादत्रिपाठी 'वागीशः शास्त्री'
निदेशकः
अनुसन्धानसंस्थानस्य

—:※:—

प्रस्तुतग्रन्थस्य वैशिष्ट्यम्

सुगूढार्थज्यौतिषसिद्धान्तग्रन्थानुशीलनादर्वाग्बीजगणित - सरलत्रिकोणमितिचलन-कलनप्रभृतिविषयाणां सम्यक् परिचयोऽत्यावश्यको भवतीति सम्प्रधार्य ज्योतिर्विन्मूर्धन्याः म०म० श्रीबापूदेवशास्त्रिमहोदयाः 'सरलत्रिकोणमिति'संज्ञं गणिततन्त्रं प्राणैषिषुः। एतद्विषय-प्रतिपादकेषु सत्स्वपि ग्रन्थान्तरेषु परीक्ष्यच्छात्राणां प्रस्तुग्रन्थसमुपलब्ध्यै प्रगाढमौत्सुक्यम्, अथ च ग्रन्थस्यास्य चिरकालाद् दुष्प्रापत्वं मॅल्लक्ष्य सम्पूर्णानन्दसंस्कृतविश्वविद्यालयीयानु-सन्धानविभागाध्यक्षमहोदयैः सनिर्बन्धं प्रणोदितेन मया शास्त्रिवर्याणां यशःस्तोमसंरक्षणायै-तद्ग्रन्थस्यैतत्संस्करणप्रकाशनभारः स्वीकृतः।

अत्र शीघ्रोपस्थितये ग्रन्थप्रतिपादितसिद्धान्तान् संकलय्य ते ग्रन्थादौ निवेशिताः सन्ति, येषु प्रमुखसिद्धान्तानां व्यावहारिकता तत्तत्सिद्धान्तनिरूपणप्रसङ्गे तत्रत्यटिप्पणीद्वारा व्यक्तीकृतास्ति। स्थलविशेषस्याशयप्रदर्शनाय च तत्तत्स्थले टिप्पण्यपि नियोजिता वर्तते। एवं तत्तदध्यायप्रतिपादितविषयाणां व्याप्तिप्रदर्शनाय प्रत्यध्यायसमाप्तौ कतिपयोदाहरणानां सङ्ग्रहश्छात्राणामभ्यासार्थं प्रदत्तोऽस्ति। अन्ते च परिशिष्टप्रकरणं निवेशितं विद्यते, यत्र छात्रजनोपकृतये निम्नाङ्कितविषयाः संगृहीतास्सन्ति—

(१) प्रस्तुतग्रन्थप्रतिपादिते त्रिभुजादिगणिते तथा पदार्थस्योच्छ्रितेर्दूरत्वस्य च परिज्ञानाय योऽत्र गणितक्रमः प्रदर्शितस्तत्र चेम्बर्स-घाताङ्कसारण्या अनुपदमुप-युज्यमानत्वादुक्तसारण्याः सविस्तरोपयोगविधिप्रदर्शनपुरस्सरं घाताङ्कगणितस्य स्वल्पपरिचयः।

(२) समानज्याकोटिज्यादिसम्बन्धिकोणानां सर्वकोणसाधारणमानानयनप्रकारः।

(३) श्रीभास्कराचार्योक्तश्रेढीसर्वधनानयनसूत्रस्य सरलत्रिकोणमितिगणितरीत्यो-पपादनम्। तथा कीदृक्श्रेढ्याः सर्वधनं वर्गादिघातसमं भवतीत्यस्य प्रदर्शनम्।

(४) ग्रहस्य सूर्यकेन्द्रीयभोगतस्तस्य भूकेन्द्रीयभोगानयनप्रकारः सोपपत्तिकः।

(५) डेमायवराख्यप्रसिद्धमहागणकसिद्धान्तद्वारा कोणस्य ज्याकोटिज्याभ्यां केनचिद् गुणकेन गुणितस्य तस्य कोणस्य ज्याकोटिज्याद्यानयनम् ।

गणितविषयकपुस्तकमुद्रणार्थमावश्यकतत्तत्सङ्केतचिह्नादिसामग्रीसम्पादने विश्व-विद्यालयीयाधिकारिपुरुषैर्यदौदार्यं प्रदर्शित तत्कृते तेभ्यो धन्यवादाः प्रदीयन्ते । तथैव मुद्रणालयनियुक्तकर्मकरैर्यथावन्मुद्रणकार्यं सम्पादितमतस्तेऽपि धन्यवादार्हाः सन्तीति शम् ।

सम्पादकः

भूमिका

साम्प्रतं भौतिकविज्ञानस्य चरमोत्कर्षेण सहैव गणितशास्त्रस्यापि नैकाः शाखा अतितरां विकसिताः। प्रागैतिहासिके काले भारते किल त्रिकोणमितिः केवलं ज्यौतिषशास्त्रस्य सहायिकारूपेणैव प्रादुरभूत्। तत इयं क्रमशो विकासमासादयन्ती गणितस्य स्वतन्त्रशाखारूपेण पल्लविता पुष्पिता च। त्रिभुजस्य भुजानां कोणानां च परिमापनं तेषां पारस्परिकसम्बन्धज्ञानमेव तदास्य मुख्यं लक्ष्यमासीत्। किन्तु साम्प्रतं गणितस्य भौतिक्याश्च विभिन्नशाखाभिर्घनिष्ठसम्पर्केणास्याः क्षेत्रं व्यापकतममभवत्। अद्यतने सन्दर्भे अस्याः किलार्थस्तासां सर्वासां निष्पत्तीनामध्ययनं नाम यद्धि कस्यापि परिमाणस्य कोणानाम् "त्रिकोणमितीयं फलनम्" (Trigonametre Functions) व्याह्रियते। त्रिकोणमितौ ज्यामितेरतिरिक्तं बीजगणितस्यापि समावेशादियं गणितस्य प्रबलतमा शाखा संवृत्ता। अत एवास्माकं देशे ज्योतिषसिद्धान्तग्रन्थेभ्यः पृथग्विषयेऽत्र स्वतन्त्रग्रन्थप्रणयनं नितान्तमावश्यकमभवत्। त्रिकोणमितेः सर्वाधिकमहत्त्वपूर्णा समुपलब्धिर्नामास्याः सहयोगेन तेषां वस्तूनामगम्यतमस्य दैशिकदैर्ध्यस्योच्चतायाश्च परिज्ञानम्। तावत्पर्यन्तमस्माकं गतिरेवासम्भविनी। एतन्माध्यमेन वयं कस्यापि पर्वतस्य, स्तम्भस्य, सर्वोच्चभवनस्य, दीर्घतमवृक्षादीनाञ्च औन्नत्यं तत्रारोहणमन्तराऽपि ज्ञातुं शक्नुमः। नदीमतीर्त्वापि तस्या विस्तारः परिमातुं शक्यते। स्थानविशेषमनासाद्यापि तस्य दूरत्वमाकलयितुं शक्यते। आकाशे सूर्यादिग्रहपिण्डानामुदयास्तमनादिकं तेषां पारस्परिकं भूतलतश्च दूरत्वम्, दिशां ज्ञानम्, क्षितिजत औन्नत्यमवनतत्वं नाम नतांशोन्नतांशज्ञानं सर्वमेतत् त्रिकोणमितिसहायमन्तरा सर्वथा दुर्ज्ञेयम्। भूमिमापनेऽपि अस्याः प्रयोगोऽतितरामावश्यकः। एतादृशे गणिते बहुधा द्विविधाः कोणाः प्रयुज्यन्ते—१. उन्नयनकोणः, २ अवनयनकोणश्च। प्राय एतेषां कोणानां परिमापने 'सेक्सटेन्ट-थियोडोलाइट'नामकानि यन्त्राणि प्रयुज्यन्ते। कोणानामेतेषां नव्यां परिभाषां सरलतमं गणितविधिञ्चाग्रे वक्ष्यामः।

ततः पूर्वमेतद् विशेषतोऽवधेयं यदाधुनिकत्रिकोणमितिशास्त्रे कोणमापनस्य त्रयो विधयः—१ षष्टिकमापनम्, २ फ्रांसीसीशतांशमापनं वा, ३ वृत्तीयमापनञ्च।

१. षष्टिकमापनम्—वृत्तस्य परिधेः ३६० समविभागान् कृत्वा प्रतिविभागस्य मानमेकोंशो मन्यते । अस्य प्राचीनतम प्रमाणं वेदे लभ्यते, यथा—

द्वादशप्रधयश्चक्रमेकं त्रीणि नभ्यकानि क उ तच्चिकेत ।
तस्मि त्साकं त्रिशता न शङ्कवोऽर्पिताः षष्टिर्न चलाचलासः ॥

(ऋग्वेद० १.१६४.४८; अथर्व० १०.८.४)

कस्यापि वृत्तस्य केन्द्रगामिन्येकोर्वी रेखा तद्वृत्तस्य व्यासरेखा प्रोच्यते, यस्याः प्रान्तौ तद्वृत्तस्य परिधौ मिलतः । व्यासरेखा स्ववृत्तं समभागद्वयं विभनक्ति । व्यासरेखावदेव तत् प्रतिलम्बभावेन च विहितयाऽन्यया रेखया वृत्त चतुर्धा समं विभनक्ति, वृत्तकेन्द्रे च तयोरेखयोः सम्पातजनिताश्चत्वारः कोणाः जायन्ते । वृत्तस्योक्ताश्चत्वारो विभागाश्चत्वारि पदानि पादानि वा गीयन्ते । सम्पूर्णवृत्ते ३६० अंशा मन्येरश्चेद् एकस्मिन् पदे नवत्यंशतुल्य एकः समकोणो जायते । अंशस्यैकस्य ६० समभागेषु विभाजनेन प्रत्येको भागः 'कला' उच्यते, एकस्याः कलायाः पुन ६० समभागेषु विभजनेन प्रत्येको भागो विकला कथ्यते । अंशस्य कृते °, कलायाः कृते ′ विकलायाश्च कृते ″ चिह्नानि प्रयुज्यन्ते । इत्थं १ समकोणः = ९०°, १ अंशः = ६०′ कलाः, १ कला च = ६०″ विकला भवन्ति । कोणमापनस्येयं पद्धतिः 'षष्टिका-पद्धतिः' उच्यते । आंगलरीतिरपीयमेव गीयते ।

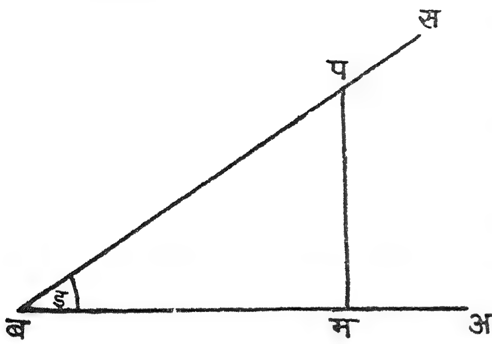
२. फ्रांसदेशीयपद्धतिः शतांशिकमापनं वा—यद्यपि रीतिरियं प्रस्तुतपुस्तके न समुल्लिखिता, तथाप्याधुनिकच्छात्राणां कृते नूनमियं ज्ञातव्या । यद्येकस्य समकोणस्य १०० समभागा विधीयन्ते, तदाऽस्या पद्धतावेतादृशः प्रत्येकभागः १ फ्रांसदेशीयांशः 'ग्रेड' इति वा (grade) गीयते । ग्रेडस्यैकस्य १०० समभागेषु प्रत्येकभागः 'फ्रांसीसीविकला' उच्यते । फ्रांसीसीयांशस्य कृते 'ग्रेड' (grade) इत्यस्य प्रथमाक्षरम् g इति चिह्नम्, फ्रांसदेशीयकलायाः कृते ′ एतच्चिह्नम्, फ्रांसदेशीयविकलायाश्चकृते ″ इति चिह्नं प्रयुज्यते । इत्थं १ समकोणः = १००g १g = १०० फ्रांसदेशीयकला, १ कला = १००′ फ्रांसदेशीयविकला भवन्ति ।

अनया शतांशिकपद्धत्या फ्रासदेशीयरीत्या वा समकोणस्य शतभागकरणेन गणनायामतितरा सौविध्यं जायते । किन्तु प्राय आंगलरात्यैव (वस्तुतो वैदिकरीत्या) कोणमापनं क्रियते । यतो हीयं नैकैर्वर्षैः प्राचीनभाषीयगणितपुस्तकेषु प्रयुज्यमाना दृश्यते । एवमेव यतः एकस्मिन् समकोणे ९०° अंशाः भवन्ति, १ समकोणे च १०० ग्रेड संज्ञका जायन्ते,

अतः $९^\circ = १०$ ग्रेड । $\therefore १^\circ = \frac{१० \text{ ग्रे०}}{९}$, तथैव १ ग्रेड $= \frac{९^\circ}{१०}$, भवति । फलतः कस्यापि कोणात्मकमानं वयं $\frac{१०}{९}$ तः गुणनेन ग्रेड संज्ञके परिणामयितुं शक्नुमः । एवमेव कस्यापि कोणस्य ग्रेडीयमाने तस्य दशमांशं वियोज्य वय तस्याशात्मकं मानं ज्ञातुं शकुमः ।

३. वृत्तीयमापनम्—गणितस्योच्चतरशाखासु कोणमापनस्य तृतीयाऽपि पद्धतिः प्रयुज्यते, यस्या एकलोंश रेडियन् (Radian) भवति । अतः प्रथमं रेडियन् इत्यस्य ज्ञानं परमावश्यकम् । यदि कस्यचिद् वृत्तस्य केन्द्रे व्यासार्द्धरेखाद्वयेनैतादृशः कोणो निर्मीयेत, यस्य सम्मुखश्चापो दीर्घतायां तद्व्यासार्द्धसमः स्यात्, तदा स कोण एकस्य रेडियनस्य भवेत् । कामं स लघुतरे महत्तरे वा वृत्ते स्यात्, एकपरिमाणक एव भवेत् । स न जातु लघुर्वा महान् वा भवेदित्यर्थः । इयमेव रेडियनस्य परिभाषा । ज्यामित्या वयं जानीमो यत् कस्यापि वृत्तस्य परिधेस्तद्व्यासस्य चाऽनुपात एकोऽचरराशिकः भवति, यो हि 'π' इति चिह्नेन ज्ञायते । एवमेवास्य π (पाई) चिह्नस्य मानं दशमलवस्याङ्कचतुष्टयपर्यन्तम् (३.१४१६) आर्यभट्टेन सिद्धान्तितम् । इदमप्युक्तपूर्वम् । अतो यदि कस्यापि वृत्तस्य त्रिज्या 'र' भवेत् तदा तस्य व्यासः २र, परिधेश्च मापः $= २\pi$र भवेत्, तथा तस्य चतुर्थांशो भागः $\frac{१}{२}\pi$र भवेत् । परिभाषया वयं जानीमो यत् र तुल्यस्य चापस्य सम्मुखस्थः कोणः एकरेडियन् भवति । अतः परिधेश्चतुर्थभागस्य पदस्य पादस्य वा सम्मुखस्थः कोणः $\frac{१}{२}\pi$ रेडियन् भवेत् । किन्तु पूर्वमेव ज्यामित्याऽस्माभिर्ज्ञातमस्ति यदयं कोण एक समकोणो भवति । एतेन सुस्पष्टमेतत् १ समकोणः $= \frac{१}{२}\pi$ रेडियन जायते । अत्र π इयमेका संख्या यस्या आसन्नमानम् $= \frac{२२}{७}$, अथवा ३.१४१६ वर्तते । यदाऽस्य प्रयोगः कोणविषये भवति, तदापीयमेकैव संख्यारूपा तिष्ठति, या हि समकोणे रेडियन्संख्यामभिव्यनक्ति । π रेडियन $= २$ समकोणः $=$ १८०° अंशाः, $\therefore$ १ रेडियन $= \frac{१८०^\circ}{३.१४१६} = ५७^\circ.२९५६४५$, अंशादिः $= ५७^\circ|१७'|४४''.३$ भवतीत्यर्थः । प्रस्तुतग्रन्थे ८० पृष्ठे अस्य अंशादिमानम् $= ५७^\circ|१७'|४४''.६$ साधितमास्ते । अन्तरम् $०''.३$ उपेक्षणीयम् । यतो हि एकस्य रेडियनस्य अंशात्मकं मानं प्रायः $\frac{१८०^\circ}{३.१४१६}$ भवति, अतः १ अंशे प्रायः ०.०१७४५३३ संख्याकाः रेडियना भवन्ति । अनुपातेनानेन वयं कस्यापि कोणस्य अंशात्मकं मानं रेडियनेषु रेडियनानां वा मानमंशेषु परिवर्तयितुं

शक्नुमः। उपरिष्टात् कोणमानस्य या रीतय उक्ताः, ताभ्यो भिन्ना एतादृश्यप्येका पद्धतिरस्ति, यत्रापेक्षितं त्रिभुजं विरच्य तद् भुजाना पारस्परिकानुपातद्वारा कोणीयमानं प्रकटयितुं शक्यते। यथा प्रस्तुतक्षेत्रे ∠ अ ब स = इ, एको निर्दिष्टकोणः, यो हि परिक्रामी ब अ रेखायाः बबिन्दोः परितः परिभ्रमन्त्याया ब स रेखोपरि गमनेन जायते। ततो ब स रेखायाः कस्माच्चन प बिन्दोः ब अ रेखोपरि प म लम्बो विधेयः। इत्थं प म ब एकं जात्यत्रिभुजं जायते, यत्र इ कोणस्य सम्मुखो भुजः प म लम्बोऽस्ति। समकोणस्य सम्मुखो भुजः ब प त्रिभुजस्य कर्णः, एवं इकोणसंलग्नः ब म भुजः त्रिभुजस्याधारः। अथ लम्बकर्णयोरनुपातेन $\frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{\text{प म}}{\text{ब प}}$ = ज्या ∠ इ इत्युच्यते। इदमेवैकवृत्तीयं फलनं किं वेयमेव त्रिकोणमितीया निष्पत्तिः।



इत्थं येन शास्त्रेण विविधनिष्पत्तीनां व्यवस्थितमध्ययनं कर्तुं शक्यते तदेव 'त्रिकोणमितिः' इति कथ्यते। यदैता निष्पत्तयस्त्रिभुजस्य सरलरेखाभिः सम्बध्यन्ते, तदैतद्विषयिणी त्रिकोणमितिः 'सरलत्रिकोणमितिः' इति कथ्यते। यदा च त्रिभुजस्य भुजाः सरलरेखावन्न भवन्ति। किन्तु खगोलीयमहद्वृत्तस्य लघुवृत्तस्य वा चापीयखण्डा भवन्ति, तदा तत् त्रिभुजं चापीयत्रिभुजं चैतद्विषयिणी त्रिकोणमितिश्च 'चापीयत्रिकोणमितिः' इति निगदन्ति कोविदाः। प्रस्तुतग्रन्थोऽयं 'सरलत्रिकोणमिति'विषयकः। खगोलीयप्रश्नानुत्तरयितुं सदैव चापीयत्रिकोणमितिरावश्यकीति न सम्भवि। प्रत्युत तत्सम्बद्धा नैके प्रश्नाः सरलत्रिकोणमित्याऽपि समाधीयन्ते। यथा—अस्मिन्नेव ग्रन्थेऽपि स्थानविशेषस्याक्षांशज्ञानाय ध्रुवोन्नतिसम्बद्धाः प्रश्नाः सरलत्रिकोणमित्यैवोत्तीर्यन्ते। संस्कृतविद्यालयोच्चतरकक्षासु सिद्धान्तज्योतिषान्तर्गता एतादृशा अन्येऽपि चैतत्सदृशाः प्रश्नाः पाठ्यन्ते।

संसारस्यादिभाषा संस्कृतम्, प्राचीनतमं साहित्यञ्च वैदिकवाङ्मयं विद्योतते। सर्वप्रथमं मानवो ज्ञानविज्ञानस्यालोकं वेदादेव प्राप्तवान्। विश्वगताः सर्वे विद्वांस ऐकमत्येन वेदमेव प्राचीनतमं ग्रन्थं मन्वते। भारतीयसाहित्यसंस्कृतेस्तु मूलस्रोत एवायम्। यदध्य-

यनेन सर्वे पुरुषार्थाः साध्यन्ते। ऋग्वेदीयप्रातिशाख्यस्य वृत्तिकृतो विष्णुमित्रमहाभागास्त्वेवमाहुः—'इह हि द्विजानां वेदाभ्यासः सकलपुरुषार्थसिद्धेः कारणमिति वैदिकसिद्धान्तः।' वेदाभ्यासस्य तात्पर्यमपि तैः सुस्पष्टीकृतम्—प्रथमं वेदस्वीकरणम् (वेदाभ्यासः), द्वितीयं वैदिकतत्त्वानुशीलनम्, तृतीयम् अभ्यसनम्, तुरीयं जपः, पञ्चमम् अन्तिमञ्चैतद् यत्किमपि पठितं मननविषयीकृतञ्च तस्य परेभ्यो दानम् अध्यापनमित्यर्थः। क्रियापञ्चकमेतद् वेदाभ्यास इति गीयते। वेदस्य सम्यगध्ययनाय ज्ञानाय प्रयोगाय प्राचीनैर्ऋषिभिः शिक्षा, कल्पः, व्याकरणम्, निरुक्तम्, छन्दः, ज्योतिषञ्चेतिषड् वेदाङ्गानि समाम्नातानि। उक्तेषु वेदाङ्गेषु ज्योतिषं वेदपुरुषस्य नेत्रस्थानीयमुक्तम्। तथा चोक्तम्—

'छन्दः पादौ तु वेदस्य हस्तौ कल्पोऽथ पठ्यते।
ज्योतिषामयनं चक्षुर्निरुक्तं श्रोत्रमेव च।
शिक्षा घ्राणं तु वेदस्य मुखं व्याकरणं स्मृतम्॥' इति।

ज्योतिषशास्त्रं त्रिस्कन्धात्मकमाहुः। यथा—

'सिद्धान्तसंहिताहोरारूपं स्कन्धत्रयात्मकम्।
वेदस्य निर्मलं चक्षुर्ज्योतिःशास्त्रमकल्मषम्॥' इति।

सिद्धान्त(गणित)ज्योतिषमेव संहितारूपस्य होरारूपफलितज्योतिषस्य च मूलाधारभूतम्। उच्चगणितस्य विशिष्टतमशाखारूपस्य ज्याचापीय(त्रिकोणमितीय)गणितस्य ज्ञानमन्तरा सिद्धान्तज्योतिषज्ञानं कथमपि समासादयितुं न शक्यते। गणितशास्त्रीयाया विशिष्टतमाया अस्या रीतेर्ज्ञानमपि विश्वस्मिन् सर्वतः प्रथममार्यैरेव स्वबुद्धिबलेन समर्जितम्। त्रिकोणमितिक्षेत्रेऽपि तैर्यत् कार्यं कृतं तदप्रतिमं स्वोपज्ञं च। तैः किल ज्या कोटिज्या उत्क्रमज्या चाविष्कृताः, यासां सोपपत्तिकाः प्रयोगा ज्योतिषशास्त्रीयसिद्धान्तग्रन्थेषु समुपलभ्यन्ते। टालमी ततः प्राक्तनाश्च ग्रीकज्योतिषवेत्तारो हि भुजज्या (sines) ज्ञानेन नितान्तमपरिचिता आसन्। ते जीवा (chordo) इत्यस्य प्रयोक्तार आसन्। भारतीयज्योतिषज्ञानात् पूर्वम् आंगलानामियं धारणाऽऽसीद् यद् ज्यां परित्यज्य भुजज्या (ज्यार्ध) इत्यस्य समुपयोग ईशवीयनवमशताब्देरुत्तरार्द्धे प्रादुर्भूतेन अरबज्योतिर्विदा अलब-टानी-महाशयेन कृतः (द्रष्टव्यो वर्जेसकृतः सूर्यसिद्धान्तस्य आंगलानुवादः, पृष्ठम् ५६)। आर्यावर्तीयविदुष आर्यभट्टस्य ग्रन्थेन सुस्पष्टं सिद्ध्यति यत् ४२१ तमे शकसंवत्सरे वयं भारतीया अर्द्धज्याभिः सह सम्यक् सुपरिचिताः। इदमपि समुल्लेख्यं यद् आर्यभट्टेन वृत्तस्य व्यासः परिधेश्चानुपातो विशुद्धतया निम्नलिखित श्लोके प्रकटीकृतः—

चतुरधिकं शतमष्टगुणं द्वाषष्टिस्तथा सहस्राणाम् ।
अयुतद्वयविष्कम्भस्यासन्नो वृत्तपरिणाहः ॥
(गणितपादः १०)

अत्र २०००० व्यासीयवृत्तस्य परिधिः ६२८३२ उक्ता। अर्थात् कस्यापि वृत्त-विशेषस्य व्यासात् तस्य परिधिः ३.१४१६ गुणिता भवति। विशेषतोऽवधेयमेतद्यत् परिधे-र्व्यासस्येयम् ३.१४१६ निष्पत्तिरार्यभट्टेनोक्तश्लोके 'आसन्नमानम्' इत्येवोक्तम्। न वास्तवं न वाऽतिसूक्ष्मम्[१]।

पाश्चात्त्यगणितशास्त्रे उक्तनिष्पत्तिर्ग्रीकवर्णमालायाः पाइ π इत्येकाक्षरेण संज्ञिता वर्तते। अस्या अधिकतमं सूक्ष्ममानम् ३.१४१५९२६५ (दशमलवस्य स्थानाष्टकं यावत्) प्रस्तुतग्रन्थे ८०तमे पृष्ठे समङ्कित वर्तते। किन्तु तत्रैव क्रियात्मकगणितेऽस्या एव मानं दशमलवस्याङ्कपञ्चकमादायैव रेडियनस्याशादिमानम् ५७°।१७'।४४"-६ साधितं यद्वि आर्य-भट्टोक्तं π इत्यस्य मानमादाय गणितकरणेन ५७°।१७'।४४"-२ इति संख्या लभ्यते। विकलान्तमाने किमप्यन्तर नास्ति, विकलायां दशमांशे -२ इत्यस्यान्तरमुपेक्षणीयमस्तीत्यर्थः इत्थं पञ्चमखीस्तशताब्द्यां ज्याचापीयगणितस्य या किल विवृतिर्भारतीयग्रन्थेषु दृश्यते, तस्या

१. एतेन सुस्पष्टमेतद्यद् आर्यभट्टा अस्या निष्पत्ते रितोऽपि सूक्ष्मं मानमासादयितुं क्षमा आसन्। किन्तु व्यावहारिकदृष्ट्या तस्य निष्प्रयोजनत्वात्तदर्थं तैरयं महान् प्रयासो न कृतः। व्यव-हाराय तैरस्य मानस्य दशमलवस्य स्थानचतुष्टयपर्यन्तं शुद्धपठनीयविधानं पर्याप्तं स्वीकृतम्। अद्यापि च विश्वस्मिन् गणितस्य पठनपाठने अभ्यासोदाहरणे चैतदेवोपयुज्यते। वस्तुतः π इत्यस्य वास्तविक मानं नूनमपरिमेयम्। कामं निरवधिदशमलवस्थानानि यावद् अग्रे गच्छन्तु। π मानस्य कृते दशमलवस्थानीयाङ्कानां परिसमाप्तिर्न भवेत्। अत्र दशमलवाङ्कपरम्पराऽनन्तकालं यावत् प्रचलिष्यतीत्यर्थः। कैश्चित् पाश्चात्त्यगणितज्ञैर्महताऽऽयासेनास्य मानं दशमलवाङ्कस्यैक-विंशतिस्थानपर्यन्तमासादितमस्ति। यथा ३.१४१५९२६५३५८९७९३२३८४६२६४३३८३२७९२ इत्यस्य 'वैदिकमैथमेटिक्स' नामके एकस्मिन्नाङ्ग्लभाषीयग्रन्थे समुल्लेखपूर्वकमेकः श्लोकः पठितः। तद-नुसारेण गणितविधानेनैकविंशत्यधिकाङ्का अपि निष्पादयितुं शक्यन्ते। ग्रन्थोऽयं गोवर्धनपुरी-पीठाधीश्वराणामनन्तश्रीविभूषितानां जगद्गुरुशङ्कराचार्याणां ब्रह्मलीनभारतीकृष्णतीर्थस्वामि-पादानां वैदिकगणितवाङ्मयस्य कृतेऽपूर्वो दायः। ये किल गणितशास्त्रे वेदविद्यावैभवं प्रत्यक्षीकर्तुं वाञ्छन्ति तेऽवश्यं ग्रन्थममुं पश्यन्तु। एतादृशस्य ग्रन्थस्य देववाण्यामनुवादोऽपि नितान्त-मावश्यकः।

ज्ञानं षोडशशताब्द्यां ब्रिग्सद्वारा यूरोपदेशेन समासादितम्। सम्प्रति सर्वसम्मतं तथ्यमेतद् यद् बीजगणितम्, खगोलविज्ञानम्, ज्यौतिषशास्त्रञ्च विश्वस्य कृते भारतस्यैव महत्तमो दायः। कैओरी (Coiori) महोदयेन 'गणितस्येतिहासः' इत्यस्मिन् ग्रन्थे लिखितं यद् हिन्दुजनैर्बीजगणितसम्बद्धानि विस्मयोत्पादकान्वेषणानि कृतानि। हिन्दुभिरेवं सर्वतः प्रथमम् ऋणात्मिकानाम् (Negative) अपरिमेयानाञ्च सङ्ख्यानामस्तित्वं ज्ञातम्। द्विघातसमीकरणम् अक्ष^२ + बक्ष + स = ०, ($ox^2 + bx + c = 0$) साधयितुं व्यापकरीतिज्ञानस्यैतिह्यं भारते प्राचीनतमम्। सर्वतः प्रथम भारतीयगणितज्ञैरेव द्विघातसमीकरणस्य मूलद्वयस्य (Roots) अस्तित्वं स्वीकृतम्। तेषां ज्ञानस्य कल्पकविधिरप्युक्तपूर्वा।

ख्रिष्टीयाष्टशतवर्षेभ्यः पूर्वमत्र बौधायनेन आपस्तम्बेन च स्वीये शुल्बसूत्रे वैदिकयज्ञार्थमावश्यकीना वेदीनां विविधानि स्थापत्यमानान्यपि विवृत्तानि वर्तन्ते। सुप्रथितो ज्यामितिशास्त्रज्ञो यूनानदेशाभिजनो 'पैथागोरस'नामा विद्वान् ज्यामितिशास्त्रीयस्य प्रमेयस्यास्य आविष्कारको मन्यते यत् 'समकोणत्रिभुजे कर्णस्य वर्गस्तदीयस्य भुजद्वयवर्गयोगेन तुल्यः' इति। किन्तु बौधायनेन पैथागोरसविदुषो बहुकालात् पूर्वमेव प्रमेयमिदं प्रस्थापितमस्ति। तैरिदमपि प्रमेयं साधितमस्ति यद् आयतस्य विकर्णे निर्मित वर्गक्षेत्रम् आयतक्षेत्रतो द्विगुणितं भवति। बहुभिः पाश्चात्यगणिताचार्यैस्तु निःसङ्कोचमिदमपि लिखितं यत् पैथागोरसेन भारतवर्षत एव प्रमेयमिदं शिक्षितम् (द्रष्टव्यम्—एलक्टंब्यूहमहोदयस्य Zciuschiflds, Dentschen of Nogeren dischen, qesrll schaft, भागः ५५, पृष्ठम् ५७५)।

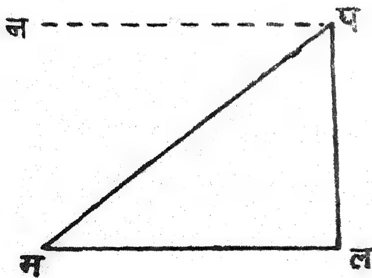
पुरा अरबभारतदेशयोर्मध्ये व्यावसायिकः सम्पर्क आसीत्। अत एव पारस्परिकादानप्रदानवशाद् हिन्दूनामिदं गणितज्ञानमप्यरबदेशेन समासादितम्। अरबदेशतश्चेदं विज्ञानं यूरोपदेशे सर्वतः प्रथमं त्रयोदशशताब्द्याः प्रारम्भे प्रसृतम्। ७७३ तमेशवीयवत्सरे कश्चिद् हिन्दूज्यौतिषी स्वीया ज्योतिर्गणितसम्बन्धिन्यः सारिणीः समादाय बगदादनगरे गतः, तत्र चैता अरबभाषायामनूदिता अभवन्। तैर्ह्येतासां नामकरणम् 'सिनहिन्द' (Shinhind) इति कृतम्। कदाचिदिदं नाम ब्रह्मगुप्तीय 'सिद्धान्त' शब्दस्यापभ्रष्टरूपं वक्तुं शक्यते। अष्टमशताब्द्याम् अरबवासिना गणितज्ञेन 'मुहम्मद-बिन-मूसा अलखारिजमी' नामकेन 'अलजब्र-उल-मुकाबिला' नामको ग्रन्थः प्रणीतो यस्य प्रथमशब्देन 'अलजब्र' इत्यनेनैव सम्भवतः 'अलजब्रा' शब्द प्रचलितः, यं किल वयं 'बीजगणितम्' ब्रूमः। इत्थं गणित-

शास्त्रज्ञानं भारतदेशतोऽरबदेशम्, अरबदेशतश्च यूरोपदेशे प्रसृतम्, यत्र समनुकूलेन परिसरेण स्थित्या च तज्ज्ञानमुत्तरोत्तरं विकसितमभवत् ।

साम्प्रतं कतिपयैर्वर्षैर्विज्ञानस्य अभूतपूर्वसमुन्नत्या गणितस्य विभिन्नशाखानामध्ययन-क्षेत्रमपि विस्तृततरमभवत् । इदानीम् उपर्युक्ता त्रिकोणमितीयप्रश्नाः आङ्ग्लविद्यालयेष्वधी-यानैश्छात्रैः प्रारम्भिकाध्ययनकाले एव समाधीयन्ते । कियत्कालं यावत् त्रिकोणमितिः उच्च-गणितस्य विषयत्वेन स्वीक्रियते स्म । आङ्ग्लविद्यालयेषु शिक्षार्थिन उच्चतरमाध्यमिक-कक्षास्वेव विषयममुमधीयाना आसन् । किन्त्वद्य शैक्षणिकस्तर एतावान् उन्नतः सञ्जातो यद् नवम-दशमकक्षात एवाङ्कगणितरेखागणिताभ्यां सहैव बीजगणितस्य त्रिकोणमितेश्चाध्य-यनं प्रारभ्यते । विद्यार्थिनश्च शङ्कुच्छाया, उन्नतांशः, अवनतांश एवमादिगणिते नैपुण्य-मासाद्योच्चतरमाध्यमिकविद्यालये विशिष्टमध्ययनं कुर्वन्ति ।

साम्प्रतं विषयस्यास्य रोचकबुद्ध्या, उद्बोधकसुगमशैल्या च प्रतिपादनं क्रियते, यद् अद्यतनो विज्ञानोन्मुखश्छात्रो विषयस्य काठिन्येन लेशतोऽपि न बिभेति । संस्कृतच्छात्राणां कृते तदीयसाम्प्रतिकपाठ्यप्रणाल्या सह परिचयो नितान्तमुपादेय इति विचार्यात्रोपर्युक्त-विषयाणां नव्यरीत्या स्पष्टीकरणं क्रियते, कतिपयानि साधितोदाहरणानि च समुपस्थाप्यन्ते, येन छात्राः स्फुटं जानीयुर्यत् त्रिकोणमितेर्बीजगणितेन सह अविच्छेद्यः सम्बन्धः संस्था-पितो वर्तते ।

पूर्वोक्तोच्चता-गम्भीरता-दूरत्वादिसम्बद्धानां प्रश्नानां समाधानाय सर्वतः प्रथमम् उन्नयनकोणस्य अवनयनकोणस्य च परिभाषा ज्ञातव्या ।



मन्यतां यत् 'प' किमप्यगम्यं वस्तु यद् भवन्तो 'म' स्थानतः पश्यन्ति । 'म' तः भूतले परिकल्पिता 'म ल' इत्यक्षरघोषिता कापि क्षितिजरेखा वर्तते प बिन्दुतः क्षितिजे प ल लम्बः परिकल्पितः । 'प' दर्शनाय स्वीये नेत्रे म प दिशि उत्थापनीये । अत्र ल म प कोणः प दर्शनाय नेत्राणां समुन्नतिं प्रदर्शयति । अतः ल म प कोणः 'उन्नयनकोणः' इत्युच्यते । अथ प बिन्दुतः ल म समानान्तरा प न रेखा विधेया । अत्र प न रेखा क्षैतिज-

रेखा भवेत्। यदि प स्थाने स्थित्वा म स्थानं द्रष्टव्यं चेत् स्वनेत्रे न प म कोणवत् नते विधेये। अत्र न प म कोणः म बिन्दोः अवनमनकोणः इत्युच्यते।

औन्नत्यविषयकाणां दूरत्वविषयकाणां प्रश्नानां समाधानं जात्यत्रिभुजस्य त्रिकोणमितेराधारितमस्ति। अतो ग्रन्थेऽस्मिन् ज्या, कोटिज्या, स्पर्शरेखा इत्याद्यष्टप्रकारकं वृत्तीयफलनं वा त्रिकोणमितीयनिष्पत्तयः क्षेत्रद्वाराऽति स्पष्टतया बोधिताः सन्ति। यथा किल साम्प्रतिकपाठ्यपुस्तकेषु नासाद्यते। तेषां सम्यक्तया ज्ञानेन निम्नलिखितक्रियायुक्तोदाहरणैस्त्रिकोणमितीयो गणितविधिर्गणितस्य तादृशो विषयो वर्तते यस्याध्ययने सफलताप्राप्तये आन्तरिकाभिरुचेर्जागरणं सर्वथाऽऽवश्यकम्। संस्कृतमाध्यमेन स्वतन्त्रतया त्रिकोणमितेरध्येतॄणां कृते प्रस्तुतग्रन्थस्य महत्त्वम्, उपयोगिता ग्रन्थकृतः पाण्डित्यपरिचयो वा सूर्यस्य दीपदर्शनमिव भवेत्।

ग्रन्थस्यास्य प्रणेतारो वेदशास्त्रनदीष्णाः महामहोपाध्यायाः कैलासवासिनः श्रीबापूदेवशास्त्रिणः सी० आई० ई० महाभागाः प्राचीनभारतीयसंस्कृतेः संस्कृतस्य चामरविभूतय आसन्। ते हि तादृशाविद्वांसो येषां पाण्डित्यस्य सौरभं प्रान्ते देशविशेषे वा न सीमितम्, अपि तु दिग्दिगन्तेषु व्याप्तमभूत्। ग्रन्थकृता ग्रन्थरत्नमिदं शताब्दीतः पूर्वं तदा प्रणीतं यदा संस्कृते स्वतन्त्ररूपेण त्रिकोणमितीयविषयाणामध्ययनार्थमेकोऽपि ग्रन्थः सुलभो नासीत्। तत्रभवता भवतामेव सत्प्रेरणया पौरस्त्यपाश्चात्त्य गणितशास्त्रस्य महामनीषिणा पण्डितप्रवरेण श्रीनीलाम्बरझामहाभागेन संस्कृते 'गोलप्रकाश'नामा ग्रन्थो निर्मितः, यो हि शास्त्रिवर्यैः स्वीये तत्त्वावधाने १७६३ शकाब्दे काशीतः प्रकाशपदवीमुपनीतः। अग्रे चास्यैवैको भागः 'चापीयत्रिकोणमिति'नाम्ना प्रकाशितोऽभूत्। एतैर्ग्रन्थैर्न केवलं संस्कृतवाङ्मये विषयस्यास्य शोचनीया रिक्तता पूर्णीकृता, प्रत्युताद्यावधि विश्वविद्यालयीयपाठ्यग्रन्थरूपेण छात्राणामशेषोपकारमपि कुर्वाणा एते विलसन्ति।

स्वर्गीयाः शास्त्रिपादाः म० म० बापूदेवाः किल स्वीयविषयेऽप्रतिमवैदुषीसम्पन्ना ग्रन्थकृतस्त्वासन्नेव, अतिकुशलाः प्राध्यापका अपि। विद्याकेन्द्रे काश्यां तत्र भवद्भिः ४७ वर्षाणि यावद् अध्यापयद्भिर्निरतिशयगौरवशालिनीशिष्यपरम्परा सृष्टा। गणिते सिद्धान्तज्यौतिषक्षेत्रे च तत्र भवद्भिर्युगान्तरकारि कार्यं विहितं यद्धि भावत्कशिष्योपशिष्यैः स्वीयेनासाधारणवैदुष्येणाधिकाधिकं वर्द्धयद्भिर्गुरुसेवाया अनुकरणीय आदर्शः समुपस्थापितः। तत्र भवतां तनयाः कैलासवासिनः गणपतिदेवशास्त्रिणोऽपि पौरस्त्यपाश्चात्त्यखगोलशास्त्रस्य, गणितस्य

सिद्धान्तज्यौतिषशास्त्रस्य चाधिकृतो विद्वांस आसन्। प्रस्तुतग्रन्थस्य वर्तमानसंस्करणस्य परिवर्द्धनमेभिरेव सत्साहाय्येन विहितम्। कष्टं यत् पुस्तकप्रकाशनात् पूर्वमेवैते शास्त्रिपादाः स्वर्गताः, अत एव ग्रन्थस्य मुद्रणालयप्रतिलिपिकरणात् संशोधनं यावत् सर्वोऽपि भारोऽस्यैव जनस्य शिरसि समापतितः।

पुस्तकमिदं कतिपयेभ्यो वर्षेभ्यो दुष्प्रापं संवृत्तं तेन छात्राणां कृतेऽतितरामसौविध्यकरमेतदभूत्। सम्पूर्णानन्दसंस्कृतविश्वविद्यालयस्यानुसन्धानसंस्थाननिदेशकानां वागीशशास्त्र्युपनामकानां श्रीभागीरथप्रसादत्रिपाठिमहाभागानां कुशलनिर्देशने ग्रन्थस्यास्य परिवर्द्धितं परिशोधितं सुसम्पादितं च संस्करणमेतद् इदानीं सुलभतां गच्छति। तत्र भवताम् आयोजनस्यास्य कृते संस्कृतजगत्प्रातिनिध्येन हार्दिकीं कृतज्ञतां ज्ञापयामि। आशासे तत्रभवन्त एवमेव दुष्प्राप्यग्रन्थरत्नानि समये समये प्राकाश्यं नयन्तः शिक्षाक्षेत्रीयस्यास्य दुःखदाभावस्य पूर्तौ सहायका भवेयुरिति शम्।

वाराणस्याम्
दीपावली
सं० २०३४ वैक्रमीया
दि० १०-११-१९७७ ई०

कारखेडकर इत्युपनामकः
—गोविन्दपाठकः
पञ्चाङ्गविभागः
सम्पूर्णानन्दसंस्कृतविश्वविद्यालयः, वाराणसी।

विषयानुक्रमणिका



॥ श्रीगणेशाम्बागुरुभ्यो नमः ॥

म० म० बापूदेवशास्त्रिकृता

सरलत्रिकोणमितिः

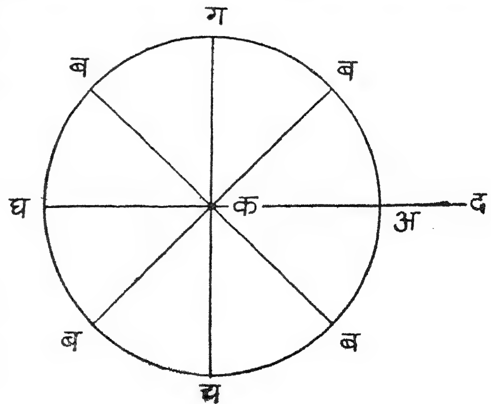
प्रथमोऽध्यायः

नत्वेभास्यं वक्ष्ये त्रिकोणमितिनामकं गणिततन्त्रम् ।
यदवगमाद्भूरवस्थं वस्तु स्याद् गणयितुं सुशकम् ॥ १ ॥

परिभाषाः

प्रक्रमः १—त्रिकोणस्य त्रयो भुजास्तावन्त एव कोणाश्चेति षडवयवा भवन्ति। तेषामवयवानामवगमकं तन्त्रं त्रिकोणमितिसंज्ञं स्यात्। तत्र कोणगुणानां सम्यग्ज्ञाने कोणानां भुजैः साकं यः सम्बन्धस्तस्य भुजानां च सम्यग् ज्ञानादत्र कोणगुणा मुख्यत्वेन वर्ण्यन्ते।

प्रक्रमः २—संयुक्तैकप्रान्तयोरेखयोरन्योन्यप्रावण्यं क्षेत्रमितौ कोणशब्देन व्यवह्रियते, किन्त्विह त्रिकोणमितौ संयुक्तैकप्रान्तयो रेखयोः संयुक्ताग्रे मिथो दृढं बध्वा पूर्वमेकां रेखामपरस्यां निधाय तस्यां निहितरेखायामेकस्मिन्नेव भूतले भ्रमितायां यावान् प्रदेशोऽतिक्रम्यते तावान् कोणसंज्ञः स्यात्।



यथाऽत्र किल क द आधाररेखा। क रेखयोः संयोगबिन्दुः। तथा कोणोत्पत्त्यै पूर्वं या रेखा क द रेखायां निधायैकस्मिन्नेव भूतले भ्रम्यते सा क ब। तदास्या रेखाया

भ्रमणेन संजातः अ क ब कोणस्त्रैकोणमितिक उच्यते । क्षेत्रमितिसम्बन्धी कोणः समकोणद्वयादधिको न भवति, परन्तु त्रिकोणमितिसम्बन्धी ततोऽप्यधिको यथेष्टं महान् जायते ।

अथ यदि क केन्द्रमभित इष्ट क अ व्यासार्धेनैकं अ ग घ च वृत्तं क्रियते, तदा अ क ब कोणसंमुखश्चापः क्षेत्रमितावर्धपरिधेरधिको न भवति, किन्त्वत्र स चापः परिधेरप्यधिको यथेष्टं भवितुमर्हति ।

प्रक्रमः ३—क बिन्दौ यथायथा अ क ब कोणो वर्द्धते, तथा तथा तत्सम्मुखचापो वर्द्धते । अतः प्रतिसमकोणसम्मुखचापः परिधिचतुर्थांशो भवति । अयमेव पदसंज्ञः ।

यथोर्ध्वक्षेत्रे अ घ व्यासे क केन्द्रे ग च लम्बकरणेन संजातानां चतुर्णां समकोणानां सम्मुखाः क्रमेण अ ग, ग घ, घ च, च अ चापाः पदाख्याः स्युः । अत एवैकस्मिन् पदे समकोणे च समाना एव नवतिस्तुल्या भागा अंशसंज्ञाः कल्प्यन्ते । तथोभयत्रैकैकस्मिन्नंशे षष्टिस्तुल्यभागाः कलासंज्ञाः कल्प्यन्ते । एकैकस्यां कलायां च षष्टिरेव तुल्यभागा विकलाख्याः कल्प्यन्ते ।

अथैतेषामंशकलाविकलासंज्ञकभागानां मानसंख्याद्योतनाय तत्तत्संख्याङ्कोपरि दक्षिणभागे क्रमेण ° ′ ″ एतानि चिह्नानि लिख्यन्ते । यथा पञ्चविंशतिरंशाश्चत्वारिंशत् कलाः षट्पञ्चाशद्विकलाश्चैतेषां द्योतनाय २५° ४०′ ५६″ एवं लिख्यन्ते ।

प्रक्रमः ४—यदि केनचित् कोणेन तत्सम्मुखचापो लभ्यते, तदान्येन कोणेन किमित्यनुपातेन तत्सम्मुखचापो लभ्यत इति क्षेत्रमितौ षष्ठाध्याये त्रयस्त्रिंशीप्रतिज्ञोपपादितास्ति, तयेदमवगम्यते—

(१) कोणतत्सम्मुखचापयोरंशादिसंख्या समैव भवति ।

(२) निर्दिष्टचापदैर्घ्यात् तच्चापसम्मुखकेन्द्रलग्नकोणस्यांशादिमानमवगन्तुं शक्यत इति ।

प्रक्रमः ५—(२ प्रक्रमस्थक्षेत्रं द्रष्टव्यम्) क द आधाररेखामारभ्य क ब रेखाया भ्रमणेन संजातः अ क ब कोणो यदा समकोणान्न्यूनो भवति, तदा स आद्यसमकोणीय उच्यते, तत्सम्मुखचापश्चाद्यपदीयः । यदा स कोण एकसमकोणादधिकः समकोणद्वयान्न्यूनः, तदा स द्वितीयसमकोणीय उच्यते, तत्सम्मुखचापश्च द्वितीयपदीयः । एवमग्रेऽपि ।

प्रक्रमः ६—क द आधाररेखातः क ब रेखा यथा यथानुलोमं भ्रमति तथा तथा अ क ब कोणो वर्द्धते, अतः सा यथा यथा विलोमं भ्रमेत् तथा तथा स कोणो ह्रासमियादिति तु स्पष्टतरम्। अत एव अ क च चतुर्थसमकोणान्तःपाती अ क ब कोणः ऋणं भवति, क ब रेखाया विलोमभ्रमेण तत्कोणोत्पत्तेः। अत एव तत्कोण-सम्मुखः अ ब चापोऽपि ऋणं भवति।

प्रक्रमः ७—यस्मात् कस्माच्चिदपि चापात् कोणाद्वा पदं समकोणो वा यावता-तिरिच्यते, तावती तच्चापस्य कोणस्य वा कोटिः स्यात्।

यथा (२ प्र० क्षे० द्र०) अ ब चापस्य अ क ब कोणस्य वा ब ग चापः ब क ग कोणो वा कोटिः स्यात्। अतश्चापकोणयोः प्रत्येकमंशादिमाने नवतेः शोधिते तयोः कोटिमानमवशिष्यते। यथा २३° १५′ ४५″ अस्य कोटिः ६६° ४४′ १५″।

अनु० (१) नवत्यधिकस्य चापस्य कोणस्य वा कोटिः ऋणं भवति।

अनु० (२) जात्यत्र्यस्रे लघुकोणयोर्योगस्य नवतितुल्यत्वात् तयोरेकोऽपरस्य कोटिर्भवति।

प्रक्रमः ८—यस्मात् कस्माच्चिच्चापात् कोणाद्वा परिध्यर्धं समकोणद्वयं वा यावताधिकं तावत् तच्चापस्य कोणस्य वा स्पर्धिसंज्ञं स्यात्।

यथा (२ प्र० क्षे० द्र०) अब चापस्य अ क ब कोणस्य वा ब घ चापः, ब क घ कोणो वा स्पर्धी स्यात्। अतश्चापकोणयोः प्रत्येकमंशादिमाने साशीतिशताच्छोधिते तयोः स्पर्धिचापकोणाववशिष्येते।

यथा ५५° ३५′ ४०″ अस्य स्पर्धी = १२४° २४′ २०″

अनु० (१) साशीतिशताधिकस्य चापस्य कोणस्य वा स्पर्धी ऋणं भवति।

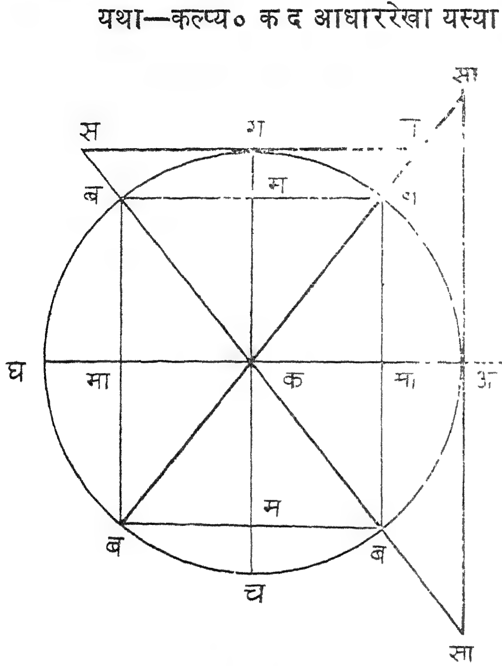
अनु० (२) त्र्यस्रमात्रे कोणत्रययोगस्य समकोणद्वयतुल्यत्वात् त्र्यस्रे एक कोणस्यापरकोणद्वययोगः स्पर्धी भवति।

प्रक्र० ९—अथ चापकोणयोः सम्बन्धिनः कतिचन पदार्थाः कथ्यन्ते। तत्र चापसम्बन्धिनः पदार्थाश्चापीया उच्यन्ते, कोणसम्बन्धिनश्च कोणीयाः।

ज्यादिपरिभाषाः

(१) चापस्यैकप्रान्ताद् व्यासं कृत्वा द्वितीयप्रान्तात् तद्व्यासोपरि कृतो लम्बस्तच्चापस्य ज्या स्यात् ।

यथा—कल्प्य० क द आधाररेखा यस्या मूलं क बिन्दुः । तं बिन्दु केन्द्रं कृत्वा क अ इष्टव्यासार्धेन अगघच वृत्तं कार्यम् । अघ, गच व्यासौ च मिथो लम्बरूपौ विधेयौ । तदा यदि अब इष्टचापः स्यात्, यस्य एकमग्रं अ बिन्दौ द्वितीयं च चतुर्णां पदानामन्यतमस्यान्तर्गतं स्यात्, तदा तस्य ज्या ब मा भवेत् ।



(२) कोणोत्पादकरेखयोरेकस्यामिष्टस्थाने बिन्दुं कृत्वा तस्मादपरस्यां कृताल्लम्बात् कोणेष्टबिद्वन्तरेणाप्तं तत्कोणस्य ज्या स्यात् ।

यथा—अ क ब कोणोत्पादकयोः क द, कसा रेखयोः क द रेखायां कसा रेखायाः ब बिन्दोर्यदि बमा लम्बः क्रियते, तदा अ क ब कोणस्य $\frac{\text{बमा}}{\text{क ब}}$ ज्या स्यात् । यदि सा बिन्दोः सा अ लम्बः क्रियते, तदा अ क ब कोणस्य $\frac{\text{साअ}}{\text{कसा}}$ ज्या स्यात् । इयं पूर्वतुल्यैव ।

(३) चापस्यैकप्रान्तात् कृते व्यासे यो लम्बरूपोऽन्यो व्यासस्तस्मिन् चापापरप्रान्तात् कृतो लम्बस्तच्चापस्य कोटिज्या स्यात् । तच्चापस्य या कोटिस्तस्या ज्येत्यर्थः । इयं ज्यामूलस्य केन्द्रस्य चान्तरेण तुल्या भवति । यथा अ ब चापस्य बम, कमा च कोटिज्या ।

(४) कोणोत्पादकरेखयोरेकस्यां स्थितादिष्टबिन्दोरपरस्यां कृतस्य

लम्बस्य कोणबिन्दोश्चान्तरात् कोणेष्टबिन्द्वन्तरेणाप्तं तत्कोणस्य कोटिज्या स्यात् ।

यथा—अ क ब कोणस्य $\frac{\text{कमा}}{\text{कब}} = \frac{\text{कअ}}{\text{कसा}}$ कोटिज्या स्यात् ।

(५) चापस्यैक प्रान्तं स्पृष्ट्वा निर्गता केन्द्रापरप्राप्तलग्नरेखावधिर्या रेखा सा तच्चापस्य स्पर्शरेखा स्यात् ।

(६) कोणोत्पादकरेखयोरेकस्यामिष्टस्थाने बिन्दुं प्रकल्प्य तस्मादपरस्यां कृताल्लम्बाल्लम्बमूलकोणबिन्द्वन्तरेणाप्तं तत्कोणस्य स्पर्शरेखा स्यात् ।

यथा—अ क ब कोणस्य $\frac{\text{बमा}}{\text{कमा}} = \frac{\text{असा}}{\text{अक}}$ स्पर्शरेखा स्यात् ।

(७) चापस्यैकमग्रं पूर्वपदादिं प्रकल्प्य तत्पादान्ताद् वृत्तं स्पृष्ट्वा निर्गता केन्द्रचापापरप्रान्तलग्नरेखावधिर्या रेखा सा तच्चापस्य कोटिस्पर्शरेखा स्यात् ।

यथा—अब चापस्य गस कोटिस्पर्शरेखा स्यात् ।

(८) कोणस्य स्पर्शरेखाया भाज्यहारयोः परिवर्तनेन यत् संपद्यते तत् कोणस्य कोटिस्पर्शरेखा स्यात् ।

यथा—अ क ब कोणस्य स्पर्शरेखा $= \frac{\text{बमा}}{\text{कमा}} = \frac{\text{असा}}{\text{अक}}$

$\therefore$ अ क ब कोणस्य कोटिस्पर्शरेखा $= \frac{\text{कमा}}{\text{बमा}} = \frac{\text{अक}}{\text{असा}}$ ।

(९) चापस्यैकप्रान्तात् कृता या स्पर्शरेखा तदवधिः केन्द्रान्निर्गता चापापर-प्रान्तलग्ना रेखा तच्चापस्य छेदनरेखा स्यात् ।

यथा । अ ब चापस्य कसा छेदनरेखा ।

(१०) कोणस्य कोटिज्याया भाज्यहारयोः परिवर्तनेन यत् संपद्यते तत् कोणस्य छेदनरेखा स्यात् । यथा—

$\because$ अ क ब कोणस्य कोटिज्या $= \frac{\text{कमा}}{\text{कब}} = \frac{\text{कअ}}{\text{कसा}}$

$\therefore$ छेदनरेखा $= \frac{\text{कब}}{\text{कमा}} = \frac{\text{कसा}}{\text{कअ}}$

(११) चापस्यैकमग्रं पूर्वपदादि प्रकल्प्य तत्पदान्तात् कृता या स्पर्शरेखा तदवधिः केन्द्रान्निर्गता चापापरप्राप्तलग्ना रेखा तच्चापस्य कोटिच्छेदनरेखा स्यात्।

यथा—अ ब चापस्य कस कोटिच्छेदनरेखा।

(१२) कोणस्य जीवाया भाज्यहारयोः परिवर्तनेन यत् संपद्यते तत् तत्कोणस्य कोटिच्छेदनरेखा स्यात्।

यथा—अकब कोणस्य ज्या $=\frac{\text{बमा}}{\text{कब}}=\frac{\text{असा}}{\text{कसा}}$।

$\therefore$ कोटिच्छेदन रेखा $=\frac{\text{कब}}{\text{बमा}}=\frac{\text{कसा}}{\text{असा}}$।

(१३) चापजीवामूलयोर्मध्ये यद्व्यासखण्डं तत् तच्चापस्योत्क्रमज्या स्यात्।

यथा—अब चापस्य अमा उत्क्रमज्या स्यात्।

(१४) कोणस्य कोटिज्ययोनं रूपं तत्कोणस्योत्क्रमज्या स्यात्।

यथा—अकब कोणस्य कोटिज्या $=\frac{\text{कमा}}{\text{कब}}=\frac{\text{कअ}}{\text{कसा}}$।

$\therefore$ उत्क्रमज्या $=१-\frac{\text{कमा}}{\text{कब}}=१-\frac{\text{कअ}}{\text{कसा}}$।

(१५) चापस्यैकमग्रं पूर्वपदादिं प्रकल्प्य तत्पदान्तस्य कोटिज्यामूलस्य च मध्ये यद्व्यासखण्डं तत् तच्चापस्य कोटयुत्क्रमज्या स्यात्। यथा अब चापस्य गम कोटयुत्क्रमज्या।

(१६) कोणस्य जीवया हीनं रूप तत्कोणस्य कोटयुत्क्रमज्या स्यात्।

यथा—अ क ब कोणस्य ज्या $=\frac{\text{बमा}}{\text{कब}}=\frac{\text{असा}}{\text{कसा}}$।

$\therefore$ कोटयुत्क्रमज्या $=१-\frac{\text{बमा}}{\text{कब}}=१-\frac{\text{असा}}{\text{कसा}}$।

प्रक० १०—यदि (अ) इदं कस्यचिच्चापस्य कोणस्य वा द्योतकं स्यात्, तदास्य ज्यादयः क्रमेणैवं लिख्यन्ते—ज्या अ, कोज्या अ, स्प अ, कोस्प अ, छे अ, कोछे अ, उ अ, कोउ अ। अत एव ज्या अ अस्य वर्गः $=(\text{ज्या अ})^2$ कोज्या अ

अस्य घनः = (को ज्या अ)^{३} इत्यादि स्यात् । परमत्र प्रायः लाघवार्थं ज्या^{२} अ, को ज्या^{३} अ इत्यादि एवमेव लिख्यते । यद्यपि ज्या^{२} अ इत्यादीनां स्थानविशेषेऽर्थोऽन्यथा कल्प्यते ।*

प्रक० ११—चापीयाः कोणीया वा जीवादयः पदविशेषे समकोणविशेषे वा ऋणत्वं प्राप्नुवन्ति । यथा (६ प्र० क्षे० द्रष्टव्यम्) अ ब चापस्य बमा ज्या प्रथमद्वितीयपदयोर्धनगतास्ति, किन्तु तृतीयचतुर्थपदयोर्दिग्वैपरीत्यादृणगता भवति । एवम् अ ब क कोणस्यापि ज्या प्रथमद्वितीयसमकोणयोर्धनगता, किन्तु तृतीयचतुर्थयोः लम्बस्य दिग्वैपरीत्यादृणगता भवति ।

एवं प्रतिपदं प्रतिसमकोणं वा जीवादीनां प्रत्येकं धनर्णत्वं निश्चित्य तदवगमायेदं चक्रं लिख्यते ।

पदाङ्काः समकोणाङ्का वा

चापीयाः कोणीया वा पदार्थाः	१	२	३	४
ज्या	+	+	—	—
कोटिज्या	+	—	—	+
स्पर्शरेखा	+	—	+	—
कोटिस्पर्शरेखा	+	—	+	—
छेदनरेखा	+	—	—	+
कोटिच्छेदनरेखा	+	+	—	—
उत्क्रमज्या	+	+	+	+
कोट्युत्क्रमज्या	+	+	+	+

* यथा, ज्या$^{-१}$अ, एतत्स्वरूपेण अकोणज्या न द्योत्यते, किन्तु येषां कोणानां ज्याः

क्षेत्रे छेदनकोटिच्छेदनरेखयोर्दिगनुलोम्यप्रातिलोम्ये न सम्यगुपलक्ष्येते, अतस्तयोर्धनर्णत्वावगमायान्यथा यत्यते। तथाहि—

$$\because \text{क मा : क ब :: क अ : क सा}, \quad \therefore \text{कसा} = \frac{\text{क ब} \times \text{क अ}}{\text{कमा}}$$

यदि अ ब चापस्य द्योतकं अ स्यात्,

$$\text{तदा छे अ} = \frac{\text{त्रि}^2}{\text{कोज्या अ}}$$

$$\text{एवं कोछे अ} = \frac{\text{त्रि}^2}{\text{ज्या अ}}$$

एवं यदि अ क ब कोणस्य द्योतकं अ स्यात्

$$\text{तदा छेअ} = \frac{\text{कब}}{\text{कमा}} = \frac{1}{\frac{\text{कमा}}{\text{क ब}}} = \frac{1}{\text{कोज्याअ}}$$

$$\text{तथा, कोछे अ} = \frac{\text{क ब}}{\text{बमा}} = \frac{1}{\frac{\text{बमा}}{\text{क ब}}} = \frac{1}{\text{ज्या अ}}$$

एतेन चापस्य कोणस्य वा छेदनकोटिच्छेदनरेखयोर्धनर्णत्वं क्रमेण कोटिज्या-ज्ययोरिव भवतीति स्फुटमवगम्यते।

प्रक्र० १२—प्रतिसमकोणादि कोणीयज्यादीनां मानं प्रतिपदादि चापीय-ज्यादीनां मानं वा नवमप्रक्रमस्थक्षेत्रदर्शनेन शीघ्रमवगम्यते।

अ तुल्याः स्युस्तेषु लघुतमकोण एव सूच्यते। एवमेव कोज्या$^{-1}$अ, स्प$^{-1}$अ, कोस्प$^{-1}$अ, छे$^{-1}$अ, कोछे$^{-1}$अ, उ$^{-1}$अ, कोउ$^{-1}$अ, एभिः स्वरूपैर्येषां कोणानां कोटिज्यादयः अतुल्यास्युस्तेषु लघुतमः कोण एव द्योतितो भवति। घातप्रक्रियानुसारं ज्या$^{-1}$अ $= \frac{1}{\text{ज्या अ}}$ एवमत्रानेन न सूच्यते। $\frac{1}{\text{ज्या अ}}$ अस्य द्योतनाय तु (ज्या अ)$^{-1}$एवं लिख्यते।

*बालावबोधाय तद्विलिख्य प्रदर्श्यते

कोणीयाश्चापीया वा पदार्थाः	अ वा ०°	ग ९०°	घ १८०°	च २७०°
ज्या	०	१	०	−१
कोटिज्या	१	०	−१	०
स्पर्शरेखा	०	∞	०	∞
कोटिस्पर्शरेखा	∞	०	∞	०
छेदनरेखा	१	∞	−१	∞
कोटिच्छेदनरेखा	∞	१	∞	−१
उत्क्रमज्या	०	१	२	१
कोट्युत्क्रमज्या	१	०	१	२

अत्र क ब त्रिज्यां रूपं प्रकल्प्य चापीयज्यादीनां मानं लिखितमस्तीति बोध्यम् ।

प्रक्र० १३—अथ नवमप्रक्रमोक्तसंज्ञानां सम्यग्ज्ञानाय कोणीयज्यादीनां कतिचन मिथः सम्बन्धाः प्रदर्श्यन्ते (९ प्र० क्षेत्रदर्शनम्) कल्प्यतां तावत् अ = ∠ अ क ब तदा

---

* एतच्चक्रात् तत्पूर्वतनचक्राच्चेदमवगन्तव्यम्—प्रथमपदादौ ० मिता धनज्या वर्धमाना पदान्ते १ समा । द्वितीयपदादौ १ मिता धनज्या क्षीयमाणा पदान्ते ० समा । तृतीयपदादौ ० मिता ऋणज्या वर्धमाना पदान्ते −१ समा । चतुर्थपदादौ −१ समा ऋणज्या क्षीयमाणा पदान्ते ० समा । अत्र धनर्णसंख्याया एव क्षीयमाणत्वं वर्धमानत्वं वा बोध्यम् । एवमत्र ०, १ अनयोर्मध्यवर्ति संख्या- +·१, +·२, इत्यादयस्तथा −१, +० अनयोर्मध्यवर्तिसंख्याः −·९, −·८ इत्यादयो ज्ञेयाः ।

प्रथमपदादौ १ मिता धनकोटिज्या क्षीयमाणा पदान्ते ० समा ।

द्वितीयपदादौ ० मिता ऋणकोज्या वर्धमाना पदान्ते −१ समा ।

तृतीयपदादौ −१ मिता ऋणकोज्या क्षीयमाणा पदान्ते ० समा ।

चतुर्थपदादौ ० मिता धनकोज्या वर्धमाना पदान्ते १ समा ।

प्रथमतृतीयपदादौ ० मिता धनस्परेखा वर्धमाना पदान्ते अनन्ता ।

(१) ज्या अ $= \frac{\text{बमा}}{\text{कब}} = \frac{\text{बमा} \div \text{बमा}}{\text{कब} \div \text{बमा}} = \frac{१}{\text{कोछे अ}}$ ।

(२) कोज्या अ $= \frac{\text{कमा}}{\text{कब}} = \frac{\text{कमा} \div \text{कमा}}{\text{कब} \div \text{कमा}} = \frac{१}{\text{छे अ}}$ ।

द्वितीयचतुर्थपदादौ अनन्ता ऋणस्परेखा क्षीयमाणा पदान्ते ० समा।

प्रथमतृतीयपदादौ अनन्ता धनकोस्परेखा क्षीयमाणा पदान्ते ० समा।

द्वितीयचतुर्थपदादौ ० मिता ऋणकोस्परेखा वर्धमाना पदान्ते ऋणगता अनन्ता।

प्रथमपदादौ १ मिता धनच्छेरेखा वर्धमाना पदान्ते अनन्ता। द्वितीयपदादौ अनन्ता ऋणच्छेरेखा क्षीयमाणा पदान्ते–१ समा। तृतीयपदादौ–१ समा ऋणच्छेरेखा वर्धमाना पदान्ते ऋणगता अनन्ता। चतुर्थपदादौ अनन्ता धन च्छे रेखा क्षीयमाणा पदान्ते १ समा।

प्रथमपदादौ अनन्ता धनकोच्छे रेखा क्षीयमाणा पदान्ते १ समा। द्वितीयपदादौ १ समा धनकोच्छेरेखा वर्धमाना पदान्ते अनन्ता। तृतीयपदादौ अनन्ता ऋणकोच्छे रेखा क्षीयमाणा पदान्ते –१ समा। चतुर्थपदादौ –१ समा ऋणकोच्छेरेखा वर्धमाना पदान्ते ऋणगता अनन्ता।

प्रथमपदादौ ० मिता धनोत्क्रमज्या वर्धमाना पदान्ते १ समा।

द्वितीयपदादौ १ मिता धनोत्क्रमज्या वर्धमाना पदान्ते २ समा।

तृतीयपदादौ २ समा धनोत्क्रमज्या क्षीयमाणा पदान्ते १ समा।

चतुर्थपदादौ १ मिता धनोत्क्रमज्या क्षीयमाणा पदान्ते ० समा।

प्रथमपदादौ १ मिता धनको उत्क्रमज्या क्षीयमाणा पदान्ते ० समा।

द्वितीयपदादौ ० मिता धनको उत्क्रमज्या वर्धमाना पदान्ते १ समा।

तृतीयपदादौ १ समा धनको उत्क्रमज्या वर्धमाना पदान्ते २ समा।

चतुर्थपदादौ २ समा धनको उत्क्रमज्या क्षीयमाणा पदान्ते १ समा।

अत्रोत्क्रमज्या कोट्युत्क्रमज्या वा रूपाधिका चेत्, सा रूपद्वयाद् विशोध्या, येन गणिते तदुपयोगः स्यात्। स्पर्शरेखादीनामानन्त्यं खहरत्वेन भवति। एवं विषमपदे $0°$ तः $४५°$ अंशान् यावत् ज्यातः कोटिज्याधिका ततः परं पदान्तावधि ज्यातः कोटिज्या न्यूना भवति। समपदे च $0°$ तः $४५°$ अंशान् यावत् ज्यातः कोटिज्या न्यूना, तदुत्तरं पदान्तावधि ज्यातः कोज्याधिका भवति।

एवमुत्क्रमज्यायाः प्रथमे द्वितीये च पदे वृद्धिः, तृतीये चतुर्थे च पदे ह्रासः। कोट्युत्क्रमज्यायाश्च द्वितीये तृतीये च पदे वृद्धिः, चतुर्थे प्रथमे च पदे ह्रासः। ज्याकोटिज्ययोर्धनर्णत्वमेवमवगम्यते। प्रथमद्वितीयपदयोर्ज्याग्रं दक्षिणसंस्थं भवतीत्यतस्तत्र ज्याया धनत्वम्, तृतीयचतुर्थपदयोर्ज्याग्रं वामसंस्थं भवतीत्यतस्तत्र ज्याया ऋणत्वं भवति। प्रथमचतुर्थपदयोः कोटिज्याग्रमूर्ध्वसंस्थं भवतीत्यतस्तत्र कोटिज्याया धनत्वम्, द्वितीयतृतीयपदयोः कोटिज्याग्रमधःस्थितं भवतीत्यतस्तत्र कोटिज्याया ऋणत्वं भवति। स्पर्शरेखादिसम्बन्धानां तदीयांशहरयोर्धनर्णत्वानुरोधेन धनर्णत्वं भवति। उत्क्रमज्याग्रं सर्वदोर्ध्वमुखमत उत्क्रमज्या धनगता। कोट्युत्क्रमज्याग्रं सर्वदा दक्षिण-संस्थमतः कोट्युत्क्रमज्या धनगता। एवमत्र ∞ एतच्चिह्नमनन्तत्वद्योतकमवगन्तव्यम्।

(३) $\text{स्प अ} = \frac{\text{बमा}}{\text{कमा}} = \frac{\text{बमा} \div \text{कब}}{\text{कमा} \div \text{कब}} = \frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}} = \frac{१}{\frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}}} = \frac{१}{\text{को स्प अ}}$

(४) $\text{को स्प अ} = \frac{\text{कमा}}{\text{बमा}} = \frac{\text{कमा} \div \text{कब}}{\text{बमा} \div \text{कब}} = \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}}$

$= \frac{१}{\frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}}} = \frac{१}{\text{स्प अ}}$ ।

(५) $\text{छे अ} = \frac{\text{कब}}{\text{कमा}} = \frac{\text{कब} \div \text{कब}}{\text{कमा} \div \text{कब}} = \frac{१}{\text{कोज्या अ}}$ ।

(६) $\text{कोछे अ} = \frac{\text{कब}}{\text{बमा}} = \frac{\text{कब} \div \text{कब}}{\text{कमा} \div \text{कब}} = \frac{१}{\text{ज्या अ}}$ ।

(७) $\text{उ अ} = १ - \text{कोज्या अ} = १ - \frac{१}{\text{छे अ}}$ ।

(८) $\text{कोउ अ} = १ - \text{ज्या अ} = १ - \frac{१}{\text{को छे अ}}$ ।

(९) $\text{ज्या}^{२}\text{अ} + \text{कोज्या}^{२}\text{अ} = \left(\frac{\text{बमा}}{\text{कब}}\right)^{२} + \left(\frac{\text{कमा}}{\text{कब}}\right)^{२}$

$= \frac{\text{बमा}^{२} + \text{कमा}^{२}}{\text{कब}^{२}} = \frac{\text{कब}^{२}}{\text{कब}^{२}} = १$ ।

$\because$ $\text{ज्या}^{२}\text{अ} = १ - \text{कोज्या}^{२}\text{अ}$, अथ च $\text{कोज्या}^{२}\text{अ} = १ - \text{ज्या}^{२}\text{अ}$ ।

(१०) $\text{छे}^{२}\text{अ} = १ + \text{स्प}^{२}\text{अ}$, अथ च $\text{को छे}^{२}\text{अ} = १ + \text{को स्प}^{२}\text{अ}$ ।

प्रक्र० १४—अथ कोणीयज्यादीना क्रमेण चापीयज्यादिभिर्यः सम्बन्धः सः प्रदर्श्यंते । यदि (अ) कोणस्य सम्मुखचापः (आ) स्यात्, तदा (९ प्र० क्षेत्र-दर्शनम्) ।

$\frac{\text{ज्या आ}}{\text{त्रि}} = \frac{\text{बमा}}{\text{कब}} = \text{ज्या अ}$ ।

$\therefore$ ज्या आ $=$ त्रि. ज्या अ । अथ यदि त्रि $=$ १

तदा ज्या आ $=$ ज्या अ ।

एवमन्यासां कोटिज्यादीनामपि ।

अनेनेदमवगम्यते—कोणीयजीवादयः रूपव्यासार्द्धे चापीया भवन्ति । एवमिष्टव्यासार्द्धेन गुणितास्ता इष्टव्यासार्द्धे चापीया भवन्ति । एवं गुण-विपर्ययेण चापीयाभ्यः कोणीया भवन्ति ।

प्रक्र० १५—अनु० । यदि कस्मिश्चित् त्रैकोणमितिके राशौ समीकरणे वा स्थिताः कोणीया जीवादय इष्ट व्यासार्द्धे चापीयत्वेनापेक्षितास्तदा तासु कोणीय-ज्यादिषु इष्टव्यासार्द्धमिते त्रि हरे कल्पिते ताश्चापीया भवन्ति ।

यथा, ज्या^{२}अ $+$ कोज्या^{२}अ $=$ १ अत्रत्यज्याकोटिज्ययोः क्रमेण

$$\frac{\text{ज्या अ}}{\text{त्रि}}, \ \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{त्रि}} \text{ आभ्यामुत्थापितयोः}$$

$$\left(\frac{\text{ज्या अ}}{\text{त्रि}}\right)^{२} + \left(\frac{\text{कोज्या अ}}{\text{त्रि}}\right)^{२} = १, \text{ एवं सिध्यति ।}$$

$\therefore$ ज्या^{२}अ $+$ कोज्या^{२}अ $=$ त्रि^{२} । एवमत्र ज्याकोटिज्ये चापीये सिद्धे ।

अथ प्रथमाध्यायसम्बन्धिनः प्रश्नाः सोत्तराः । तत्र पूर्वोक्तप्रक्रमाणां व्याप्ति-प्रदर्शनायोदाहरणानि ।

(१) उदाहरणम्—

अ कोणस्य ज्यादित्रैकोणमितिकसम्बन्धाश्छेदनरेखारूपेण प्रदर्शनीयाः ।

$$\text{ज्या अ} = \frac{\sqrt{\text{छे}^{२}\text{ अ} - १}}{\text{छे अ}}, \quad \text{को ज्या अ} = \frac{१}{\text{छे अ}},$$

$$\text{स्प अ} = \sqrt{\text{छे}^{२}\text{ अ} - १}, \quad \text{को स्प अ} = \frac{१}{\sqrt{\text{छे}^{२}\text{ अ} - १}},$$

$$\text{छे अ}, \qquad \text{को छे अ} = \frac{\text{छे अ}}{\sqrt{\text{छे}^{२}\text{ अ} - १}} \text{ ।}$$

(२) उदाहरणम्—

$$\sqrt{\frac{१ - \text{कोज्या अ}}{१ + \text{कोज्या अ}}} = \text{कोछे अ} - \text{कोस्प अ, इतिकथम्।}$$

$$\sqrt{\frac{१ - \text{कोज्या अ}}{१ + \text{कोज्या अ}}} = \sqrt{\frac{(१ - \text{कोज्या अ})^२}{१ - \text{कोज्या}^२ \text{ अ}}} = \frac{१ - \text{कोज्या अ}}{\sqrt{१ - \text{कोज्या}^२\text{अ}}}$$

$$= \frac{१ - \text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}} = \frac{१}{\text{ज्या अ}} - \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}} = \text{कोछे अ} - \text{कोस्प अ।}$$

(३) उदाहरणम्—

$$\sqrt{\text{छे}^२ \text{ अ} + \text{को छे}^२ \text{ अ}} = \text{स्प अ} + \text{कोस्प अ, इति कथम्।}$$

$\because$ छे^{२} अ $= १ +$ स्प^{२}अ, को छे^{२} अ $= १ +$ कोस्प^२ अ,

$\therefore$ छे^{२} अ $+$ कोछे^{२} अ $=$ स्प^२ अ $+ २ +$ कोस्प^२ अ,

$\because$ कोस्प अ $\times$ स्प अ $= १$ $\therefore$ स्प^२ अ $+ २ +$ कोस्प^२ अ

$=$ (स्प अ $+$ कोस्प अ)^२

$\therefore \sqrt{\text{छे}^२ \text{ अ} + \text{कोछे}^२ \text{ अ}} = \text{स्प अ} + \text{कोस्प अ।}$

(४) उदाहरणम्—

यदि ज्या अ $= \frac{१}{३}$, तदा अकोणस्य शेषसम्बन्धानां व्यक्तमानानि प्रदर्श्यन्ताम्।

अत्र कोज्या^{२} अ $= १ - \frac{१}{९} = \frac{८}{९}$ $\therefore$ कोज्या अ $= \frac{२\sqrt{२}}{३}$,

$$\text{स्प अ} = \frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}} = \frac{१}{२\sqrt{२}} = \frac{\sqrt{२}}{४},$$

$$\text{कोस्प अ} = \frac{१}{\text{स्प अ}} = २\sqrt{२}, \text{ छे अ} = \frac{१}{\text{कोज्या अ}}$$

$= \frac{३}{२\sqrt{२}} = \frac{३\sqrt{२}}{४}$, कोछे अ $= \frac{१}{ज्या\ अ} = ३$,

उ अ $= १ -$ कोज्या अ $= १ - \frac{२\sqrt{२}}{३}$,

कोउ अ $= १ -$ ज्या अ $= १ - \frac{१}{३} = \frac{२}{३}$ ।

(५) उदाहरणम्—

स्प अ + छे अ = १·५, अस्मात् ज्या अ, अस्य मानं कथमवगन्तव्यम् ।

अत्र ज्या अ इत्यस्य मानमपेक्षितम् । अतः स्प अ, छे अ, इति सम्बन्धद्वयं ज्या अ इत्यस्प स्वरूपेण प्रदर्श्योत्तरं क्रियते ।

स्प अ + छे अ $= \frac{ज्या\ अ}{\sqrt{१ - ज्या^{२}\ अ}} + \frac{१}{\sqrt{१ - ज्या^{२}\ अ}} = १·५ = \frac{३}{२}$,

छेदगमेन २ ज्या + २ $= ३\sqrt{१ - ज्या^{२}\ अ}$,

पक्षयोर्वगण ४ ज्या^{२} अ + ८ ज्या अ + ४ = ९—९ ज्या^{२} अ,

समशोधनेन १३ ज्या^{२} अ + ८ ज्या अ = ५,

वर्गसमीकरणनियमेन १६९ ज्या^{२} अ + १०४ ज्या अ + १६ = ६५ + १६ = ८१,

मूलग्रहणेन १३ ज्या अ + ४ = ९, ∴ १३ ज्या अ = ५,

∴ ज्या अ $= \frac{५}{१३}$ ।

अभ्यासार्थमुदाहरणानि (१)

(१) $\frac{कोछे\ अ}{कोछे\ अ - १} + \frac{कोछे\ अ}{कोछे\ अ + १} = २$ छे^{२} अ, इति कथम् ।

(२) $\frac{१}{कोस्प\ अ + स्प\ अ} =$ ज्या अ × कोज्या अ ।

(३) (छे अ + कोज्या अ) (छे अ—कोज्या अ) = स्प^{२} अ + ज्या^{२} अ ।

(४) $\dfrac{\text{१—स्प अ}}{\text{१+स्प अ}} = \dfrac{\text{कोस्प अ—१}}{\text{कोस्प अ+१}}$ ।

(५) (ज्या अ+कोज्या अ) (कोस्प अ+स्प अ) = छे अ + कोछे अ ।

(६) छे^{४} अ—छे^{२} अ = स्प^{४} अ + स्प^{२} अ ।

(७) कोस्प^{४} अ + कोस्प^{२} अ = कोछे^{४} अ—कोछे^{२} अ ।

(८) छे^{२} अ × कोछे^{२} अ = स्प^{२} अ + कोस्प^{२} अ + २ ।

(९) (१+कोस्प अ—कोछे अ) (१ + स्प अ + छे अ) = २ ।

(१०) २ उ अ + कोज्या^{२} अ = १ + उ^{२} अ ।

(११) कोज्या^{६} अ + ज्या^{६} अ = १—३ ज्या^{२} अ × कोज्या^{२} अ ।

(१२) यदि ज्या अ = $\frac{१}{४}$, तदा अ कोणस्य शेषत्रैकोणमितिकसम्बन्धाना व्यक्तमानानि प्रदर्शयत ।

(१३) कोज्या अ = $\frac{४}{५}$, तदा ज्या अ, कोस्प अ, अनयोर्मानि के ?

(१४) कोज्या अ = $\frac{९}{४१}$ तदा स्प अ, कोछे अ, अनयोर्मानि के ?

(१५) स्प अ = $\frac{३}{४}$, तदा अ कोणस्य ज्या कोटिज्योत्क्रमज्या कोटिच्छेदन-रेखाणां मानानि कानि ?

(१६) स्प अ = $\dfrac{१}{\sqrt{७}}$, तदा $\dfrac{\text{को छे}^{२}\text{अ—छे}^{२}\text{अ}}{\text{को छे}^{२}\text{अ+छे}^{२}\text{अ}}$, अस्य व्यक्तमानं किम् ?

(१७) कोस्प अ = $\frac{१५}{८}$, तदा कोज्या अ, कोछे अ अनयोर्मानि प्रदर्शयत ।

(१८) छे अ = $\frac{३}{२}$, तदा स्प अ, कोछे अ, अनयोर्मानि अपेक्षिते ।

(१९) २ ज्या अ = २—कोज्या अ, अत्र ज्या अ अस्य मानद्वयं प्रदर्श्यताम् ।

(२०) यदि स्प^{२}अ + छे अ = ५, तदा कोज्या अ अस्य मानं किम् ?

(२१) यदि स्प अ + कोस्प अ = २, तदा ज्या अ अस्य मानं किम् ?

(२२) यदि छे^{२}अ = २ + २स्प अ, तदा स्प अ अस्य किं मानम् ?

(२३) स्प अ $= \frac{२य(य+१)}{२य+१}$, तदा ज्या अ, कोज्या अ अनयोर्मानि के ?

(अत्र ज्याकोटिज्यावर्गयोगस्य रूपसमत्वेन २य (य+१), २य+१, एतत्प्रश्नोक्तपदद्वयवर्गयोगस्य यन्मूलं तेनोक्तपदद्वये विभक्ते ज्या-कोटिज्ये भवत इति ज्ञेयम्, यथा स्प अ $= \frac{३}{४}$,

$\therefore$ ज्या अ $= \frac{३}{५}$, को ज्या अ $= \frac{४}{५}$ ।

यदि ज्या ३०° $= \frac{१}{२}$, ज्या ४५° $= \frac{१}{\sqrt{२}}$ तदा निम्नलिखितसमीकरणसाम्य-मुपपाद्यताम् ।

(२४) $\frac{४}{३}$ कोस्प^{२} ३०° + ३ ज्या^{२} ६०° − २ को छे^{२} ६०° − $\frac{३}{४}$ स्प^{२} ३०° = $३\frac{१}{३}$ ।

(२५) को छे^{२} ४५° × छे^{२} ३०° × ज्या^{३} ९०° × कोज्या ६०° = $१\frac{१}{२}$ ।

(२६) ज्या अ, अस्य सर्वे त्रैकोणमितिकसम्बन्धाः कोटिज्यास्वरूपेण कोटि-स्पर्शरेखास्वरूपेण च प्रदर्श्यन्ताम् ।

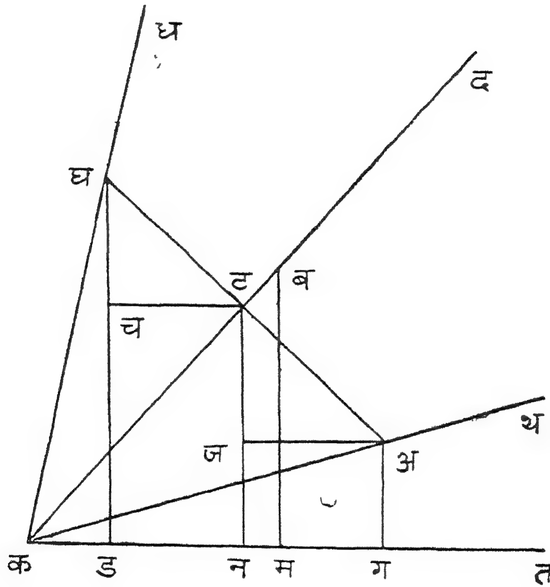
इति म० म० बापूदेवशास्त्रिकृतायां त्रिकोणमितौ प्रथमोऽध्यायः ।



द्वितीयोऽध्यायः

अत्र कोणानां योगान्तरज्यादिसाधनम्, ज्यादिसम्बन्धियोगान्तरवधफलानां मानानि अर्द्धांशज्याकोटिज्यानयनम् ज्यादीनां मानानां वैचित्र्यम्, निर्दिष्टांशानां ज्याकोटिज्यानयनम्, कोणीयज्यादीनां सारण्युत्पादनप्रकारश्चेति प्रोच्यते ॥

प्रक्र० १६—अथ द्वयोः कोणयोर्ज्याभ्यां कोटिज्याभ्यां च तत्कोणद्वयैक्यान्तरज्याकोटिज्यासाधनम् ।



अत्र किल त क द बृहत्कोणः = अ, तथा द क ध लघुकोणः = क, अनयोर्द्वयोरपि कोणबिन्दुः क एव, तदा ∠ त क ध = अ + क । एवं क ध रेखायां क्वापि घ बिन्दुः कार्यः । क द रेखायां घट लम्बः कार्यः । स च अ पर्यन्तं तथा वर्द्धनीयः यथा ट अ = घ ट स्यात् । क अ रेखा थ पर्यन्तं कार्या, तदा क अ = क घ । अथ च ∠थ क द = क, भवेत् ।

$\therefore$ $\angle$ त क थ = अ — क स्यात् ।

अथ क द रेखातः क घ तुल्या क ब रेखा पृथक्कार्या। क त रेखायां घ, ट, ब, अ बिन्दुभ्यः क्रमेण घ ड, ट न, ब म, अ ग लम्बाः कार्याः। अ, ट बिन्दुभ्यां च क्रमेण ट न, घ ड, रेखयोः अ ज, ट च लम्बौ कार्यौ तदा संजाते घ च ट, ट ज अ त्रिभुजे सर्वांशैस्तुल्ये भवतः।

$\therefore$ घ च = ट ज। तथा च ट = ज अ।

अथैते त्रिभुजे, क ट न, क ब म त्रिभुजे च, एतानि मिथः सजातीयानि भवन्ति।

अथ ज्या अ $= \frac{\text{ब म}}{\text{क ब}}$। ज्या क $= \frac{\text{घ ट}}{\text{क घ}} = \frac{\text{घ ट}}{\text{क ब}}$।

कोज्या अ $= \frac{\text{क म}}{\text{क ब}}$। कोज्या क $= \frac{\text{क ट}}{\text{क घ}} = \frac{\text{क ट}}{\text{क ब}}$।

तथा, ज्या (अ + क) $= \frac{\text{घ ड}}{\text{क घ}} = \frac{\text{घ ड}}{\text{क ब}}$। ज्या (अ — क) $= \frac{\text{अ ग}}{\text{क अ}} = \frac{\text{अ ग}}{\text{क ब}}$।

कोज्या (अ + क) $= \frac{\text{क ड}}{\text{क घ}} = \frac{\text{क ड}}{\text{क ब}}$। कोज्या (अ — क) $= \frac{\text{क ग}}{\text{क अ}} = \frac{\text{क ग}}{\text{क ब}}$।

अथ घ ड = च ड + घ च = ट न + घ च।

अ ग = ट न - ट ज = ट न — घ च।

क ड = क न — ड न = क न - च ट।

क ग = क न + न ग = क न + अ ज = क न + च ट।

अथ च त्रिभुजसाजात्यात् $\frac{\text{ट न}}{\text{क ट}} = \frac{\text{ब म}}{\text{क ब}} = \frac{\text{च ट}}{\text{घ ट}}$।

ट न $= \frac{\text{ब म.क ट}}{\text{क ब}}$ तथा च ट $= \frac{\text{ब म.घ ट}}{\text{क ब}}$।

$\frac{\text{घ च}}{\text{घ ट}} = \frac{\text{क म}}{\text{क ब}} = \frac{\text{क न}}{\text{क ट}}$, $\therefore$ घ च $= \frac{\text{क म.घ ट}}{\text{क ब}}$। तथा क न $= \frac{\text{क म.क ट}}{\text{क ब}}$।

$\therefore$ घ ड $= \frac{\text{ब म.क ट}}{\text{क ब}} + \frac{\text{क म.घ ट}}{\text{क ब}}$ यद्वा

$$\frac{\text{घ ड}}{\text{क ब}} = \frac{\text{ब म}}{\text{क ब}} \cdot \frac{\text{क ट}}{\text{क ब}} + \frac{\text{क म}}{\text{क ब}} \cdot \frac{\text{घ ट}}{\text{क ब}}।$$

$$अ ग = \frac{ब म . क ट}{क ब} - \frac{क म . घ ट}{क ब} ।$$

$$यद्वा \quad \frac{अ ग}{क ब} = \frac{ब म}{क ब} \cdot \frac{क ट}{क ब} - \frac{क म}{क ब} \cdot \frac{घ ट}{क ब} ।$$

$$क ड = \frac{क म . क ट}{क ब} - \frac{ब म . घ ट}{क ब} ।$$

$$यद्वा \quad \frac{क ड}{क ब} = \frac{क म}{क ब} \cdot \frac{क ट}{क ब} - \frac{ब म}{क ब} \cdot \frac{घ ट}{क ब} ।$$

$$क ग = \frac{क म . क ट}{क ब} + \frac{ब म . घ ट}{क ब} ।$$

$$यद्वा \quad \frac{क ग}{क ब} = \frac{क म}{क ब} \cdot \frac{क ट}{क ब} + \frac{ब म}{क ब} \cdot \frac{घ ट}{क ब} ।$$

∴ *ज्या (अ + क) = ज्या अ.कोज्या क + कोज्या अ.ज्या क (१)

ज्या (अ — क) = ज्या अ.कोज्या क — कोज्या अ.ज्या क (२)

कोज्या (अ + क) = कोज्या अ.कोज्या क — ज्या अ.ज्या क (३)

कोज्या (अ — क) = कोज्या अ.कोज्या क + ज्या अ.ज्या क (४)

एतदानयनम् (क) कोणम् (अ) कोणाल्लघु प्रकल्प्य (अ + क) कोणं च सम-कोणान्न्यूनं प्रकल्प्य कृतम् किन्तु (क) कोणस्य (अ) कोणादधिकत्वे (अ + क)

---

* यथा कल्प्यताम् अ = ३०°, क = ४५°, ज्या ३०° = $\frac{१}{२}$, कोज्या ३०° = $\frac{\sqrt{३}}{२}$,

ज्या ४५° = $\frac{१}{\sqrt{२}}$, कोज्या ४५° = $\frac{१}{\sqrt{२}}$,

तदा ज्या (अ + क) = ज्या(३० + ४५)

= ज्या ३०° × कोज्या ४५° + कोज्या ३०° × ज्या ४५°

$$= \frac{१}{२} \times \frac{१}{\sqrt{२}} + \frac{\sqrt{३}}{२} \times \frac{१}{\sqrt{२}} = \frac{\sqrt{३} + १}{२\sqrt{२}} = ज्या \ ७५° ।$$

कोणस्य च समकोणादधिकत्वे उक्तरीत्या कोणैक्यान्तरज्याकोटिज्ये पूर्वसाधिते एव सम्पद्येते* ।

---

* अत्र १६ प्रक्रमस्थक्षेत्रे अ, क न्यूनकोणौ निर्दिष्टौ स्तः । अनयोरेकतरकोणमानस्य समकोणात् समकोणद्वयात् समकोणत्रयाद्वाधिकत्वे तदितरस्य च न्यूनकोणत्वे सिद्धान्तोऽयं न व्यभिचरतीति प्रदर्श्यते । कल्प्यताम् अ $=$ ९०° $+$ अ $=$ अ$_1$. $\therefore$ ज्या अ$_1$ $=$ कोज्या अ, कोज्या अ$_1$ $= -$ ज्या अ, (१८ प्रक्रमेण), अतः ज्या (अ$_1$ $+$ क) $=$ ज्या { ९०° $+$ (अ $+$ क) } $=$ कोज्या (अ $+$ क) $=$ कोज्या अ $\times$ कोज्या क $-$ ज्या अ $\times$ ज्या क,
उत्थापनेन, ज्या अ$_1$ $\times$ कोज्या क $+$ को ज्या अ$_1$ $\times$ ज्याक ।

एवमेव, कोज्या (अ$_1$ $+$ क) $=$ कोज्या { ९०° $+$ (अ $+$ क) } $= -$ ज्या (अ $+$ क), (१८ प्रक्रमेण),

$= -$ ज्या अ $\times$ कोज्या क $-$ कोज्या अ $\times$ ज्या क, उत्थापनेन,

$=$ कोज्या अ$_1$ $\times$ कोज्या क $-$ ज्या अ$_1$ $\times$ ज्या क ।

अस्यां स्थितौ अकोणमानं समकोणाधिकम् (अ $+$ क), अस्य च मानम् ०° तः १८०° अंशावधि किमपि भवितुमर्हति । पुनः कल्प्यताम् अ $=$ ९०° $+$ अ$_1$ $=$ अ$_2$, $\therefore$ ज्या अ$_2$ $=$
$=$ ज्या (९०° $+$ अ$_1$) $=$ कोज्या अ$_1$ $=$ कोज्या (९०° $+$ अ) $= -$ ज्या अ ।

एवं कोज्या अ$_2$ $=$ कोज्या (९०° $+$ अ$_1$) $= -$ ज्या अ$_1$ $= -$ ज्या (९०° $+$ अ) $=$
$-$ को ज्या अ ।

ततः ज्या (अ$_2$ $+$ क) $=$ ज्या { १८०° $+$ (अ $+$ क) } $= -$ ज्या (अ $+$ क) $=$
$-$ ज्या अ $\times$ कोज्या क, $-$ कोज्या अ $\times$ ज्या क, उत्थापनेन,
ज्या अ$_2$ $\times$ कोज्या क $+$ कोज्या अ$_2$ $\times$ ज्या क ।

अस्यां स्थितौ अकोणमानं समकोणद्वयाधिकम् (अ $+$ क), अस्य च मानम् ०° तः २७०° अंशावधि किमपि भवितुमर्हति । एवमेव कोज्या (अ$_2$ $+$ क) $=$
कोज्या { १८०° $+$ (अ $+$ क) } $= -$ कोज्या (अ $+$ क) $=$
$-$ कोज्या अ $\times$ कोज्या क $+$ ज्या अ $\times$ ज्या क, उत्थापनेन, कोज्या अ$_2$ $\times$ कोज्या क
$-$ ज्या अ$_2$ $\times$ ज्या क ।

पुनः कल्प्यताम् अ $=$ ९०° $+$ अ$_2$ $=$ अ$_3$ $\therefore$ ज्या अ$_3$ $=$ ज्या (९०° $+$ अ$_2$) $=$

प्रक्र० १७/अनु०/अनन्तरप्रक्रमस्थ (२), (४) समीकरणयोः यदि (अ) कोणः शून्यं कल्प्येत, तदा—

ज्या (−क) = −ज्याक ।

कोज्या (−क) = कोज्या क ।

अनेनेदमवगम्यते—ऋणगतकोणस्य ज्या ऋणं भवति कोटिज्या च धनं भवतीति ।

अत एव $स्प (-क) = \frac{ज्या (-क)}{को ज्या (-क)} = \frac{-ज्या क}{को ज्या क} = -स्प क$ ।

एवमेव कोस्प (−क) = −कोस्प क । छे (−क) = छे क । †

कोछे (−क) = −कोछे क । उ (−क) = उ क ।

को उ (−क) = २ − को उ. क ।

प्रक्र० १८ । अनु० । यदि १६ प्रक्रमे (२), (४) अनयोरेव

$अ = १८०^\circ$ स्युः तदा—

$ज्या (१८०^\circ - क) = ज्या १८०^\circ \times कोज्या क - कोज्या १८०^\circ \times ज्याक$

$कोज्या अ_२ = -कोज्या अ$, उक्त प्रकारेण, एवं $कोज्या अ_३ = कोज्या (९० + अ_२) = -ज्या अ_२ = + ज्या अ$, उक्त प्रकारेण,

ततः $ज्या (अ_३ + क) = ज्या \{१८०^\circ + (९० + \overline{अ + क})\} = -ज्या (९०^\circ + \overline{अ + क}) = -कोज्या (अ + क) = -कोज्या अ \times कोज्या क + ज्या अ \times ज्या क$,

उत्थापनेन $ज्या अ_३ \times कोज्या क + कोज्या अ_३ \times ज्या क$ ।

एवमेव $कोज्या (अ_३ + क) = कोज्या \{१८०^\circ + (९०^\circ + \overline{अ + क})\} = -कोज्या (९०^\circ + \overline{अ + क}) = ज्या (अ + क) = ज्या अ \times कोज्या क + कोज्या अ \times ज्या क$,

उत्थापनेन $कोज्या अ_३ \times कोज्या क - ज्या अ_३ \times ज्या क$ ।

अस्यां स्थितौ अ कोणमानं समकोणत्रयाधिकम् (अ + क), अस्य मानं च ०° तः ३६०° अंशावधि किमपि भवितुमर्हति ।

† अत्र धनगत क कोणकोटयुत्क्रमज्या = १ − ज्या क, ∴ ऋण ग त क कोण कोटयुत्क्रमज्या = १ − (−ज्याक) = १ + ज्या क = २ − (१ − ज्याक) = २ − को उ क ।

(१२ प्र०) $=$ ० $\times$ कोज्या क‡ $+$ १ $\times$ ज्याक
$=$ ज्याक ।

अथ च कोज्या (१८०° $-$ क) $=$ कोज्या १८०° $\times$ कोज्या क
$+$ ज्या १८०° $\times$ ज्या क $=$ $-$१ $\times$ कोज्या क $+$ ज्या० $\times$ ज्या क
$=$ $-$कोज्या क ।

अनेनेदमवगम्यते—कोणस्य तद्धीनसमकोणद्वयस्य च ज्या तुल्यैव भवति। कोणोनसमकोणद्वयस्य कोटिज्या तत्कोणकोटिज्यया तुल्या भवति । किन्तु धनर्णत्व-व्यत्यासमात्रं तयोः :

अत एव स्प (१८०°$-$क) $=$ $\dfrac{\text{ज्या (१८०°–क)}}{\text{कोज्या (१८०–क)}}$ $=$ $\dfrac{\text{ज्या क}}{\text{–कोज्या क}}$ $=$ $-$स्प क।

एवमेव कोस्प (१८०°$-$क) $=$ $-$ कोस्प क। छे (१८०°$-$क) $=$ $-$ छे क।

एवमेव, ∵ ज्या (अ $+$ क) $=$ ज्या अ. कोज्या क $+$ कोज्या अ. ज्याक।

तथा कोज्या (अ $+$ क) $=$ कोज्या अ. कोज्या क $-$ ज्या अ. ज्याक।

∴ यदि अ $=$ ९०° तदा ज्या (९०° $+$ क) $=$ कोज्या क,

तथा कोज्या (९०° $+$ क) $=$ $-$ ज्या क*

---

‡ अत्र — को ज्या १८०° $\times$ ज्या क $=$ $-$ ($-$१ $\times$ ज्या क) $=$ $+$ १ $\times$ ज्या क, इति ज्ञेयम् ।

* तथैव स्प (९०° $+$ क) $=$ $-$को स्प क, को स्प (९०° $+$ क) $=$ $-$ स्प क,

छे (९०° $+$ क) $=$ $-$ कोछे क, कोछे (९०° $+$ क) $=$ $+$ छे क, एवं

स्प (१८०° $+$ क) $=$ स्प क, कोस्प (१८०° $+$ क) $=$ कोस्प क, छे (१८०° $+$ क) $=$ $-$छे क, कोछे (१८०° $+$ क) $=$ $-$ कोछे क ।

अत्र तृतीयपदीय, क कोणो नवत्यधिकश्चेत्, तं साशीतिशताद्विशोध्य शेषस्य ज्या तृतीयपदवदृणगता, शेषकोटिज्या तु तद्विपरीता धनगता भवति। यथाग्रे प्रदर्शितमस्ति।

अथ १८ प्रक्रमसाहाय्येन समकोणचतुष्टयादपि यथेष्टं महतः कस्यापि कोणस्य ज्यादि-सम्बन्धाः प्रदर्शयितुं शक्यन्ते । तदर्थमादौ तस्मात् कोणात् ३६०° अस्य कोऽपि तादृशोऽपवर्त्यो विशोध्यः, येन शेषं समकोणचतुष्टयान्न्यूनमवशिष्येत । यथा १७६५° अस्य ज्यादि-

अथ च, यदि अ $=$ १८०° तदा ज्या (१८०° + क) $=$ $-$ ज्या क

तथा कोज्या (१८०° + क) $=$ $-$ कोज्या क

प्रक्र० १६—षोडशप्रक्रमोक्तानि (१), (२), (३), (४), एतानि समीकरणानि यदि इष्टव्यासार्द्धे चापीयान्यपेक्षितानि, तदा (प्र० १५) रीत्या।

$$\frac{\text{ज्या (अ + क)}}{\text{त्रि}} = \frac{\text{ज्या अ}}{\text{त्रि}} \cdot \frac{\text{कोज्या क}}{\text{त्रि}} + \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{त्रि}} \cdot \frac{\text{ज्या क}}{\text{त्रि}} \text{।}$$

$$\text{यद्वा ज्या (अ + क)} = \frac{\text{ज्या अ. कोज्या क}}{\text{त्रि}} + \frac{\text{कोज्या अ. ज्या क}}{\text{त्रि}}$$

$$\text{एवमेव ज्या (अ − क)} = \frac{\text{ज्या अ. कोज्या क}}{\text{त्रि}} - \frac{\text{कोज्या अ. ज्या क}}{\text{त्रि}}$$

अत एव श्रीभास्कराचार्याः

चापयोरिष्टयोर्दोर्ज्ये मिथः कोटिज्यकाहते।
त्रिज्याभक्ते तयोरैक्यं तच्चावैक्यस्य दोर्ज्यका ॥

चापान्तरस्य जीवा स्यात्तयोरन्तर सम्मिता। इत्ति ज्योत्पत्तौ प्रोचुः।

$$\text{अथ च } \frac{\text{कोज्या (अ + क)}}{\text{त्रि}} = \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{त्रि}} \cdot \frac{\text{कोज्या क}}{\text{त्रि}} - \frac{\text{ज्या अ}}{\text{त्रि}} \cdot \frac{\text{ज्या क}}{\text{त्रि}} \text{।}$$

सम्बन्धा ज्ञातुमभीष्टाश्चेत् १७६५° $-$ ४ × ३६०° $=$ ३२५°, अतोऽस्य कोणस्यैव ज्यादिसम्बन्धा उक्तकोणस्य भवेयुरित्यतः ज्या ३२५° $=$ ज्या (१८०° + १४५°) $=$ —ज्या १४५° $=$ — ज्या (१८०° — ३५°) $=$ — ज्या ३५°। एवं कोज्या ३२५° $=$ कोज्या (१८० + १४५°) $=$ — कोज्या १४५°, तृतीयपदे ज्याकोटिज्ययोर्ऋणत्वात्, ततः — कोज्या १४५° $=$ — कोज्या (१८०° — ३५°) $=$ — (—कोज्या ३५°) $=$ + कोज्या ३५°। आभ्यां ज्याकोटिज्याभ्यां शेषसम्बन्धा ज्ञातुं सुलभाः। अथवा समकोणचतुष्टयान्न्यूनकोणस्य भुजं विधाय तन्न्यूनकोणपदानुसारेण तद्भुजस्य ज्यादीनां धनर्णत्वज्ञानं सुलभं भवति। यथा ३२५° अस्य न्यूनकोणस्य भुजः ३६०° — ३२५° $=$ ३५°, न्यूनकोणस्य चतुर्थपदगतत्वेन ज्या ३२५° $=$ —ज्या ३५°, कोज्या ३२५° $=$ + कोज्या ३५°। अत्र समानज्यादिसम्बन्धिकोणानां सर्वकोणसाधारणमानज्ञानाय परिशिष्टोक्तप्रकारोऽवलोकनीयः।

यद्वा कोज्या $(अ+क) = \frac{\text{कोज्या अ.कोज्या क}}{\text{त्रि}} - \frac{\text{ज्या अ. ज्या क}}{\text{त्रि}}$ ।

एवमेव कोज्या $(अ-क) = \frac{\text{कोज्या अ. कोज्या क}}{\text{त्रि}} + \frac{\text{ज्या अ. ज्या क}}{\text{त्रि}}$ ।

अत एव तत्त्वविवेके स्पष्टाधिकारे ज्योत्पत्तौ

"दोर्ज्ययोः कोटिमौर्व्योश्च घातौ त्रिज्योद्धृतौ तयोः ।
वियोगयोगौ जीवेस्तश्चापैक्यान्तरकोटिजे ॥" इति ।

प्रक्र० २०—अथ यतः

ज्या (अ+क) = ज्या अ. कोज्या क + कोज्या अ. ज्या क (१)

ज्या (अ−क) = ज्या अ कोज्या क − कोज्या अ. ज्या क (२)

कोज्या (अ+क) = कोज्या अ. कोज्या क − ज्या अ. ज्या क (३)

कोज्या (अ—क) = कोज्या अ. कोज्या क + ज्या अ. ज्या क (४)

अतः (१), (२) अनयोः (३), (४) अनयोश्च पृथक् सकलनव्यवकलनाभ्याम् ।

*ज्या (अ+क) + ज्या (अ—क) = २ ज्या अ. कोज्या क (चा)

---

* २० प्रक्रमस्थ (चा), (छा), इत्यादि समीकरणचतुष्टयद्वारा द्विगुणराशिद्वयघातोऽन्यराशिद्वयस्य योगरूपेणान्तररूपेण वा प्रदर्शयितुं शक्यते । एषु समीकरणेष्वेको द्विगुणराशिद्वयघातरूपो घातपक्षः, अपरपक्षोऽन्यराशिद्वयस्य योगरूपोऽन्तररूपो वा योगान्तरपक्षो भवति ।

अत्र घातपक्षीयकोणद्वययोगसमो योगान्तरपक्षीय एकराशिः, अन्यराशिस्तु तत्कोणद्वयान्तरतुल्यो ज्ञेयः । अत्रोदाहरणार्थं २ ज्या ६६° × ज्या ५४° अयं द्विगुणराशिद्वयघातोऽन्तररूपेण प्रदर्श्यते ।

अत्र अ = ६६°, क = ५४°, इति कल्प्यते, तदा (झा) अनुसारेण २ ज्या ६६° × ज्या ५४° = २ ज्या अ × ज्या क = कोज्या (अ—क) − कोज्या (अ+क) = कोज्या (६६°—५४°)—कोज्या (६६° + ५४°) = कोज्या १२°—कोज्या १२०° ।

अथास्य सिद्धान्तस्य स्वाभाविक—ज्याकोटिज्यातः प्रतीतिरुत्पाद्यते । यथा चेम्बर्ससारणीतः, पूर्वोक्तोदाहरणे ६६° अंशानां स्वाभाविकी ज्या = ·९१४, ५४° अंशानां स्वा० ज्या = ·८०९, अनयोर्घातो द्विगुणः = १·४७८ । एवं १२° अंशानां स्वा० को ज्या = ·९७८

ज्या (अ + क) — ज्या (अ — क) = २ कोज्या अ. ज्या क (छा)

कोज्या (अ + क) + कोज्या (अ — क) = २ कोज्या अ. कोज्या क (जा)

कोज्या (अ — क) — कोज्या (अ + क) = २ ज्या अ. ज्या क (झा

अथ (१), (२), अनयोर्गुणनेन

ज्या (अ + क). ज्या (अ — क)

= ज्या^{2} अ. कोज्या^{2} क – कोज्या^{2} अ. ज्या^{2} क

= ज्या^{2} अ (१ — ज्या^{2} क) — (१ — ज्या^{2} अ) ज्या^{2} क

= ज्या^{2} अ — ज्या^{2} अ. ज्या^{2} क — ज्या^{2} क + ज्या^{2} अ. ज्या^{2} क

= ज्या^{2} अ — ज्या^{2} क = (ज्या अ + ज्या क) (ज्या अ — ज्या क)

अथवा, = १ — कोज्या^{2} अ — (१ — कोज्या^{2} क)

= कोज्या^{2} क — कोज्या^{2} अ = (कोज्या अ + कोज्या क)

(कोज्या क — कोज्या अ)

एवमेव (३), (४), अनयोर्गुणनेन

कोज्या (अ + क). कोज्या (अ — क)

= कोज्या^{2} अ. कोज्या^{2} क — ज्या^{2} अ. ज्या^{2} क

= (१ — ज्या^{2} अ) कोज्या^{2} क — ज्या^{2} अ (१ — कोज्या^{2} क)

= कोज्या^{2} क — ज्या^{2} अ = (कोज्या क + ज्या अ) (कोज्या क — ज्या अ)

तथा १२०° अंशानां स्वा० कोज्या ऋणगता = – कोज्या (१८०° — ६०°) = —(— कोज्या ६०°) = + ·५००, कोणोनसमकोणद्वयस्य कोटिज्या तत्कोणकोटिज्यया ऋणगतया तुल्या भवतीति १८ प्रक्रमस्थनियमेन। अत उभयोर्योगः १·४७८ अयमुक्तद्विगुण-ज्याघातसमो भवति। अत्र ऋणकोटिज्याया ऋणगतत्वेन धनगतत्वं भवतीति ज्ञेयम्।

एवमेव २ ज्या ३ अ × कोज्या अ = ज्या ३ अ + ज्या २ अ, (चा) अनुसारतः।

२ ज्या ५ अ × ज्या ४ अ = कोज्या २अ – को ज्या ८ अ, (झा) अनुसारेण।

२ कोज्या ११अ × कोज्या २ अ = कोज्या १३ अ + को ज्या ९ अ, (जा) अनुसारम्।

$$\text{वा} = १ - \text{ज्या}^२ \text{ क} - १ + \text{कोज्या}^२ \text{ अ} = \text{कोज्या}^२ \text{ अ} - \text{ज्या}^२ \text{ क}$$

$$= (\text{कोज्या अ} + \text{ज्या क}) . (\text{कोज्या अ} - \text{ज्या क})$$

अथ (१) अस्मिन् (२) अनेन भक्ते सिद्धम्

$$\frac{\text{ज्या (अ + क)}}{\text{ज्या (अ — क)}} = \frac{\text{ज्या अ. कोज्या क} + \text{कोज्या अ. ज्या क}}{\text{ज्या अ. कोज्या क} - \text{कोज्या अ. ज्या क}}$$

$$= \frac{\frac{\text{ज्या अ. कोज्या क}}{\text{कोज्या अ. कोज्या क}} + \frac{\text{कोज्या अ. ज्या क}}{\text{कोज्या अ. कोज्या क}}}{\frac{\text{ज्या अ. कोज्या क}}{\text{कोज्या अ. कोज्या क}} - \frac{\text{कोज्या अ. ज्या क}}{\text{कोज्या अ. कोज्या क}}}$$

$$= \frac{\frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}} + \frac{\text{ज्या क}}{\text{कोज्या क}}}{\frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}} - \frac{\text{ज्या क}}{\text{कोज्या क}}}$$

$$= \frac{\text{स्प अ} + \text{स्प क}}{\text{स्प अ} - \text{स्प क}} \text{ वा} = \frac{\text{कोस्प *क} + \text{कोस्प अ}}{\text{कोस्प क} - \text{कोस्प अ}}$$

$$\text{वा} = \frac{१ + \text{कोस्प अ. स्प क}}{१ - \text{कोस्प अ. स्प क}} = \frac{\text{स्प अ. कोस्प क} + १}{\text{स्प अ. कोस्प क} - १} ।$$

एवमेव, $$\frac{\text{कोज्या (अ + क)}}{\text{कोज्या (अ — क)}} = \frac{\text{कोज्या अ. कोज्या क} - \text{ज्या अ. ज्या क}}{\text{कोज्या अ. कोज्या क} + \text{ज्या अ. ज्या क}}$$

$$= \frac{\text{कोस्प अ} - \text{स्प क}}{\text{कोस्प अ} + \text{स्प क}} \text{ वा} = \frac{\text{कोस्प क} - \text{स्प अ}}{\text{कोस्प क} + \text{स्प अ}}$$

$$\text{वा} \quad = \frac{\text{कोस्प अ. कोस्प क} - १}{\text{कोस्प अ. कोस्प क} + १}$$

$$\text{वा} \quad = \frac{१ - \text{स्प अ. स्प क}}{१ + \text{स्प अ. स्प क}} ।$$

अथ (१), अस्मिन् (३) अनेन भक्ते सिद्धम्

$$\frac{\text{ज्या (अ + क)}}{\text{कोज्या (अ + क)}} = \text{स्प (अ + क)}$$

---

* पूर्वोक्तहरांशौ $\frac{१}{\text{ज्या अ} \times \text{ज्या क}}$, अनेन संगुण्य स्वरूपमिदमुत्पादनीयम् ।

$$= \frac{\text{ज्या अ. कोज्या क} + \text{कोज्या अ. ज्या क}}{\text{कोज्या अ. कोज्या क} - \text{ज्या अ. ज्या क}}$$

$$= \frac{\text{स्प अ} + \text{स्प क}}{१ - \text{स्प अ. स्प क}} \cdots\cdots (\text{च}),*$$

$$\text{वा} \quad = \frac{\text{कोस्प क} + \text{कोस्प अ}}{\text{कोस्प अ. कोस्प क} - १},$$

$$\text{वा} \quad = \frac{१ + \text{कोस्प अ. स्प क}}{\text{कोस्प अ} - \text{स्प क}}, \text{ वा } \frac{\text{स्प अ. कोस्प क} + १}{\text{कोस्प क} - \text{स्प अ}} \text{ ।}$$

एवमेव (२) अस्मिन् (४) अनेन भक्ते लब्धम्

$$\text{स्प (अ} - \text{क)} = \frac{\text{ज्या अ. कोज्या क} - \text{कोज्या अ. ज्या क}}{\text{कोज्या अ. कोज्या क} + \text{ज्या अ. ज्या क}}$$

$$= \frac{\text{स्प अ} - \text{स्प क}}{१ + \text{स्प अ. स्प क}} \text{ इत्यादि} \cdots\cdots (\text{छ})$$

प्रक्र० २१—कल्प्यतां तावत् अ = प + फ तथा क = प — फ

$\therefore$ प = $\frac{१}{२}$ (अ + क) तथा फ = $\frac{१}{२}$ (अ — क)

$\therefore$ ज्या (अ) = ज्या (प + फ) = ज्या प. कोज्या फ + कोज्या प. ज्या फ

= ज्या $\frac{१}{२}$ (अ + क). कोज्या $\frac{१}{२}$ (अ — क) +
कोज्या $\frac{१}{२}$ (अ + क) ज्या $\frac{१}{२}$ (अ — क) (आ)

एवमेव

ज्याक = ज्या $\frac{१}{२}$ (अ + क) कोज्या $\frac{१}{२}$ (अ — क) — कोज्या $\frac{१}{२}$
(अ + क) ज्या $\frac{१}{२}$ (अ — क) (का)

---

* अत्र (च), (छ)—अनयोर्भाज्यहारौ परिवर्त्य तयोः कोस्प अ × कोस्प क, अनेन गुणितयोः क्रमेण

$$\text{कोस्प (अ} + \text{क)} = \frac{\text{कोस्प अ} \times \text{कोस्प क} - १}{\text{कोस्प अ} + \text{कोस्प क}} \text{ ।}$$

$$\text{कोस्प (अ} - \text{क)} = \frac{\text{कोस्प अ} \times \text{कोस्प क} + १}{\text{कोस्प क} - \text{कोस्प अ}} \text{ ।}$$

अत्रेदमप्यवगन्तव्यम् $\frac{१}{\text{स्प अ}}$ = कोस्प अ, $\frac{१}{\text{कोस्प अ}}$ = स्प अ, इति ।

कोज्या अ = कोज्या $\frac{1}{2}$ (अ + क) कोज्या $\frac{1}{2}$ (अ — क) — ज्या $\frac{1}{2}$
(अ + क) ज्या $\frac{1}{2}$ (अ — क) (गा)

कोज्या क = कोज्या $\frac{1}{2}$ (अ + क). कोज्या $\frac{1}{2}$ (अ — क) + ज्या $\frac{1}{2}$
(अ + क) ज्या $\frac{1}{2}$ (अ — क) (घा)

प्रक्र० २२—(आ), (का) अनयोः (गा), (घा) अनयोश्च पृथग् योगान्तराभ्यां सिद्धम् ।

ज्या अ + ज्याक = २ ज्या $\frac{1}{2}$ (अ + क) कोज्या $\frac{1}{2}$ (अ — क) (पा)*

ज्या अ — ज्या क = २ कोज्या $\frac{1}{2}$ (अ + क). ज्या $\frac{1}{2}$ (अ — क) (फा)

* प्रस्तुतप्रक्रमस्थ (पा), (फा)इत्यादिसिद्धान्तचतुष्टयद्वारा ज्ययोः कोटिज्ययोश्च योगोऽन्तरं वा द्विगुणान्यराशिद्वयघातरूपेण प्रदर्शयितु शक्यते। अत्रापि २० प्रक्रमवदेको घातपक्षः, अन्यश्च योगान्तरपक्षो भवति। तत्र योगान्तरपक्षीयकोणद्वययोगार्द्धं घातपक्षीय एक राशिः, अन्यराशिश्च तत्कोणद्वयान्तरार्धतुल्यो ज्ञेय। अस्योदाहरणम् ।

कोज्या १२° — कोज्या १२०°' एतद्राशिद्वयान्तरं द्विगुणान्यराशिद्वयघातरूपेण प्रदर्शनीयमस्ति। अत्र, अ = १२°, क = १२०°, इति कल्पिते (भा) इत्यनुसारतः कोज्या १२° — कोज्या १२०° = कोज्या अ — कोज्या क = २ ज्या $\frac{1}{2}$ (अ + क) × ज्या $\frac{1}{2}$ (अ — क), तत उत्थापनेन, = २ ज्या $\left(\frac{१२° + १२°}{२}\right) \times \frac{\text{ज्या } (१२०° - १२°)}{२}$

= २ ज्या ६६° × ज्या ५४° ।

अस्मादिदमवगम्यते, यद् असंख्यातः क संख्याधिका चेत् कोज्या अ — कोज्या क = २ ज्या $\frac{1}{2}$ (अ + क) × ज्या $\frac{1}{2}$ (क — अ), एवं लेखनीयं भवतीति। एवमत्र राशिद्वययोगान्तरस्य द्विगुणान्यराशिद्वयघातरूपेण प्रदर्शनाद् घाताङ्कनियमानुसारं गुणनक्रियां विना योगक्रिययैव तद्राशिद्वययोगान्तरज्ञान भवतीति लाघवम् ।

अत्रेष्टव्यासार्धे परिणामिताभ्याम् [पा], [फा] स्वरूपाभ्याम्,
"चापविश्लेषयोगार्धजीवे कोटिज्यकाहते।
मिथस्त्रिज्याहते द्विघ्न्यौ चापज्या वियुतियुतिः॥" इति विशेषोक्तमुपपद्यते।
तथैवेष्टव्यासार्धपरिणामिताभ्याम् [बा], [भा] स्वरूपाभ्याम्,
"चापविश्लेषयोगार्धज्ययोः कोटिज्ययोर्हतिः।
द्विगुणा त्रिगुणाप्ता च कोटिज्या वियुतियुतिः॥" इति विशेषोक्तमुपपन्नं भवति।

कोज्या अ + कोज्या क

$= २$ कोज्या $\frac{१}{२}$ (अ + क). कोज्या $\frac{१}{२}$ (अ — क) (बा)

कोज्या क — कोज्या अ $= २$ ज्या $\frac{१}{२}$ (अ + क) ज्या $\frac{१}{२}$ (अ — क) (भा)

(१) (पा) अस्मिन् (फा) अनेन भक्ते सिद्धम्

$$\frac{\text{ज्या अ + ज्या क}}{\text{ज्या अ — ज्या क}} = \frac{\text{२ ज्या } \frac{१}{२} \text{ (अ + क). कोज्या } \frac{१}{२} \text{ (अ — क)}}{\text{२ कोज्या } \frac{१}{२} \text{ (अ + क). ज्या } \frac{१}{२} \text{ (अ — क)}}$$

$$= \frac{\text{ज्या } \frac{१}{२} \text{ (अ + क)}}{\text{कोज्या } \frac{१}{२} \text{ (अ + क)}} \times \frac{\text{कोज्या } \frac{१}{२} \text{ (अ — क)}}{\text{ज्या } \frac{१}{२} \text{ (अ — क)}}$$

$$= \text{स्प } \frac{१}{२} \text{ (अ + क)} \times \text{कोस्प } \frac{१}{२} \text{ (अ — क)}$$

$$= \text{स्प } \frac{१}{२} \text{ (अ + क)} \times \frac{१}{\text{स्प } \frac{१}{२} \text{ (अ — क)}}$$

$$= \frac{\text{स्प } \frac{१}{२} \text{ (अ + क)}}{\text{स्प } \frac{१}{२} \text{ (अ — क)}} ।$$

(२) (बा) अस्मिन् (भा) अनेन भक्ते सिद्धम् ।

$$\frac{\text{कोज्या क + कोज्या अ}}{\text{कोज्या क — कोज्या अ}} = \text{कोस्प } \frac{१}{२} \text{ (अ + क) कोस्प } \frac{१}{२} \text{ (अ — क)} ।$$

$$\text{(३) पा} \div \text{बा} = \frac{\text{ज्या अ + ज्या क}}{\text{को ज्या अ + को ज्या क}}$$

$$= \frac{\text{२ ज्या } \frac{१}{२} \text{ (अ + क). कोज्या } \frac{१}{२} \text{ (अ — क)}}{\text{२ कोज्या } \frac{१}{२} \text{ (अ + क) कोज्या } \frac{१}{२} \text{ (अ — क)}} = \frac{\text{ज्या } \frac{१}{२} \text{ (अ + क)}}{\text{कोज्या } \frac{१}{२} \text{ (अ + क)}}$$

$$= \text{स्प } \frac{१}{२} \text{ (अ + क)} ।$$

$$\text{(४)} \quad \text{फा} \div \text{भा} = \frac{\text{ज्या अ — ज्या क}}{\text{कोज्या क — कोज्या अ}}$$

$$= \frac{\text{२ कोज्या } \frac{१}{२} \text{ (अ + क). ज्या } \frac{१}{२} \text{ (अ — क)}}{\text{२ ज्या } \frac{१}{२} \text{ (अ + क). ज्या } \frac{१}{२} \text{ (अ — क)}}$$

$$= \frac{\text{कोज्या } \frac{१}{२} \text{ (अ + क)}}{\text{ज्या } \frac{१}{२} \text{ (अ + क)}} = \text{कोस्प } \frac{१}{२} \text{ (अ + क)} ।$$

(५) (पा) ÷ (भा) = $\frac{\text{ज्या अ + ज्या क}}{\text{कोज्या क — कोज्या अ}}$ = कोस्प $\frac{१}{२}$ (अ—क)।

(६) (फा) ÷ (बा) = $\frac{\text{ज्या अ — ज्या क}}{\text{कोज्या अ + कोज्या क}}$ = स्प $\frac{१}{२}$ (अ—क)।

प्रक्र० २३—यतः ज्या (न + १) अ = ज्या (अ न + अ)

= ज्या अ न. कोज्या अ + को ज्या अ न. ज्या अ।

कोज्या (न + १) अ = कोज्या (अ न + अ)

= कोज्या अ न. कोज्या अ — ज्या अ न. ज्या अ।

∴ यदि न = १, २, इत्यादि स्यात्

तदा (१) ज्या २ अ = ज्या (अ + अ) = ज्या अ. कोज्या अ +

कोज्या अ. ज्या अ = २ ज्या अ. कोज्या अ।

(२) कोज्या २ अ = कोज्या (अ + अ) = कोज्या अ. कोज्या अ—

ज्या अ. ज्या अ = कोज्या^{२} अ — ज्या^{२} अ

= १ — २ ज्या^{२} अ = २ कोज्या^{२} अ — १ ।*

(३) ज्या ३ अ = ज्या (अ + २ अ) = ज्या २ अ. कोज्या अ +

कोज्या २ अ. ज्या अ

= २ ज्या अ. कोज्या^{२} अ + कोज्या^{२} अ. ज्या अ — ज्या^{३} अ

= ३ ज्या अ. कोज्या^{२} अ — ज्या^{३} अ

= ३ ज्या अ — ४ ज्या^{३} अ।

---

* तथैव स्प २ अ = $\frac{\text{ज्या २ अ}}{\text{कोज्या २ अ}}$ = $\frac{\text{२ ज्या अ. कोज्या अ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{ अ — ज्या}^{२}\text{ अ}}$

अत्र हरांशौ कोज्या^{२} अ अनेन भक्तौ

= $\frac{\text{२ स्प अ}}{\text{१ — स्प}^{२}\text{ अ}}$

अथवा २० प्रक्रमस्थ स्प (अ + क) इत्यनुसारं स्प$_{२}$ अ = स्प (अ + अ) =

$\frac{\text{स्प अ + स्प अ}}{\text{१ — स्प अ × स्पअ}}$ = $\frac{\text{२ स्प अ}}{\text{१ — स्प}^{२}\text{अ}}$, इति ज्ञेयम्।

(४) कोज्या ३ अ = कोज्या (अ + २अ) =

कोज्या २ अ. कोज्या अ — ज्या २ अ. ज्या अ

= (२ कोज्या^{२} अ — १) कोज्या अ — २ ज्या^{२} अ. कोज्या अ

= २ कोज्या^{३} अ — कोज्या अ — २ कोज्या अ + २ कोज्या^{३} अ

= ४ कोज्या^{३} अ – ३ कोज्या अ †इत्यादि।

प्रक्र० २४—अनन्तरोक्तप्रक्रमस्थात् (२) अस्मात्

२ ज्या^{२} अ = १ — कोज्या २ अ (पा)

२ कोज्या^{२} अ = १ + कोज्या २ अ (फा)

(१) यदि (पा) इदं (फा) अनेन ह्रियते

तदा $\frac{\text{ज्या}^{२}\ \text{अ}}{\text{कोज्या}^{२}\ \text{अ}}$ = स्प^{२} अ = $\frac{१ — \text{कोज्या २ अ}}{१ + \text{कोज्या २ अ}}$।

(२) यदि (पा) (फा) अनयोः (२ अ) इदं (अ) अनेनोत्थाप्यते,

तदा २ ज्या^{२} $\frac{१}{२}$ अ = १ — कोज्या अ } अथैतयोः (१५) प्रक्रमोक्तरीत्या

२ कोज्या^{२} $\frac{१}{२}$ अ = १ + कोज्या अ } इष्टव्यासार्द्धे परिणामितयोः सिद्धम्

२ ज्या^{२} $\frac{१}{२}$ अ = त्रि^{२} — त्रि. कोज्या अ = त्रि (त्रि — कोज्या अ)……(ता)

२ कोज्या^{२} $\frac{१}{२}$ अ = त्रि^{२} + त्रि. कोज्या अ = त्रि (त्रि + कोज्या अ)…(था)

---

† तथैव स्प ३ अ = स्प (अ + २ अ) = $\frac{\text{स्प अ} + \text{स्प २ अ}}{१ — \text{स्प अ} \times \text{स्प २ अ}}$ (२० प्रक्रमेण) =

$$\frac{\text{स्प अ} + \frac{\text{२ स्प अ}}{१ — \text{स्प}^{२}\ \text{अ}}}{१ — \text{स्प अ} \times \frac{\text{२ स्प अ}}{१ — \text{स्प}^{२}\ \text{अ}}}$$

= $\frac{\text{स्प अ}\ (१ — \text{स्प}^{२}\ \text{अ}) + \text{२ स्प अ}}{(१ — \text{स्प}^{२}\ \text{अ}) — \text{२ स्प}^{२}\ \text{अ}}$ = $\frac{\text{३ स्प अ} — \text{स्प}^{३}\ \text{अ}}{१ — \text{३ स्प}^{२}\ \text{अ}}$। एवमेव चतुस्संख्यादि गुणित अ कोणस्पर्शरेखा ज्ञेयाः। प्रकारोऽयमीषद् गौरवान्वितः ; यतोऽत्र स्प २ अ इत्यादिस्थाने स्प ३ अ इत्यादिकल्पनीयं भवति। डेमायवराख्य (De Moivre)-सुप्रसिद्धगणकसिद्धान्तद्वारा गुणगुणितकोणस्य ज्यादिसम्बन्धास्सुखेनावगम्यन्ते। सिद्धान्तोऽयं सोपपत्तिकस्सोदाहरणश्च परिशिष्टे निर्दिष्टोऽस्ति।

(३) (ता) अस्माद् इदमुत्पद्यते—

$$२ \text{ ज्या}^{२} \tfrac{१}{२} \text{अ} = \frac{२ \text{ त्रि}^{२} - २ \text{ त्रि. कोज्या अ}}{२} =$$

$$\frac{\text{ज्या}^{२} \text{अ} + \text{कोज्या}^{२} \text{अ} + \text{त्रि}^{२} - २ \text{ त्रि. कोज्या अ}}{२}$$

$$= \frac{\text{ज्या}^{२} \text{अ} + (\text{त्रि} - \text{कोज्या अ})^{२}}{२} = \frac{\text{ज्या}^{२} \text{अ} + \text{उ}^{२} \text{अ}}{२}$$

$$\therefore \text{ ज्या } \tfrac{१}{२} \text{अ} = \tfrac{१}{२}\sqrt{\text{ज्या}^{२} \text{अ} + \text{उ}^{२} \text{अ}} \text{ ।}$$

अत एव भास्कराचार्याः—

क्रमोत्क्रमज्याकृतियोगमूलाद् दलं तदर्धांशकशिञ्जिनी स्यात् ।
इति प्रोचुः ।

अथ च

$$\text{ज्या } \tfrac{१}{२} \text{अ} = \sqrt{\tfrac{१}{२} \text{त्रि } (\text{त्रि} - \text{कोज्या अ})} = \sqrt{\tfrac{१}{२} \text{त्रि. उ अ}} \text{ ।}$$

उक्तं च भास्करेण—

त्रिज्योत्क्रमज्यानिहतेर्दलस्य मूलं तदर्धांशकशिञ्जिनी वा ॥ इति ।

(४) यदि (ता), (था) अत्र (अ) वर्णः ($९०^\circ \mp$ अ) अनेनोत्थाप्यते

$$\text{तदा, } २ \text{ ज्या}^{२} \tfrac{१}{२} (९०^\circ \mp \text{अ}) = \text{त्रि})^{२} - \text{त्रि. कोज्या } (९०^\circ \mp \text{अ})$$

$$= \text{त्रि}^{२} \mp \text{त्रि. ज्या अ ।}$$

$$२ \text{ कोज्या}^{२} \tfrac{१}{२} (९०^\circ \mp \text{अ}) = \text{त्रि}^{२} + \text{त्रि. कोज्या } (९०^\circ \mp \text{अ})$$

$$= \text{त्रि}^{२} \pm \text{त्रि. ज्या अ ।}$$

$$\therefore \text{ ज्या } \tfrac{१}{२} (९०^\circ \mp \text{अ}) = \frac{\sqrt{\text{त्रि}^{२} \mp \text{त्रि. ज्या अ}}}{२} \text{ ।}$$

$$\text{कोज्या } \tfrac{१}{२} (९०^\circ \mp \text{अ}) = \sqrt{\frac{\text{त्रि}^{२} \pm \text{त्रि. ज्या अ}}{२}} \text{ ।}$$

अतएव श्रीमान् भास्करः ।

त्रिज्या भुजज्या हतिहीनयुक्ते त्रिज्याकृत्ती तद्दलयोः पदे स्तः ।
भुजोनयुक्तत्रिभखण्डयोर्ज्ये कोटिं भुजज्यां परिकल्प्य चैवम् ॥ इति ।

प्रक्र० २५ । २२ प्रक्रमस्थयोः (फा), (भा) अनयोर्वर्गयोगे कृते सिद्धम् ।

$$(\text{ज्या अ} - \text{ज्या क})^{२} + (\text{कोज्या क} - \text{कोज्या अ})^{२}$$

$= ४$ कोज्या^{२} $\frac{१}{२}$ (अ + क). ज्या^{२} $\frac{१}{२}$ (अ — क) $+ ४$ ज्या^{२} $\frac{१}{२}$ (अ + क).
ज्या^{२} $\frac{१}{२}$ (अ — क)

$= ४$ ज्या^{२} $\frac{१}{२}$ (अ — क) { कोज्या^{२} $\frac{१}{२}$ (अ + क) + ज्या^{२} $\frac{१}{२}$ (अ + क) }

$= ४$ ज्या^{२} $\frac{१}{२}$ (अ — क)

$\therefore$ ज्या $\frac{१}{२}$ (अ — क) =

$\frac{१}{२}\sqrt{(\text{ज्या अ}-\text{ज्या क})^{२}+(\text{कोज्या क}-\text{कोज्या अ})^{२}}$ ।

एवमनेकधा

*अस्मिन्निष्टव्यासार्धे परिणामितेऽपि विकारो न भवति। अत एव भास्करः।

यद्दोर्ज्ययोरन्तरमिष्टयोर्यत्कोटिज्ययोस्तत्कृतियोगमूलम्।
दलीकृतं स्याद्भुजयोर्वियोगखण्डस्य जीवैवमनेकधा वा ॥ इति।

प्रक्र० २६। अनन्तर प्रक्रमस्थसमीकरणे यदि (क) कोणः (९०° — अ) अनेनोत्थाप्यते, तदा

ज्या $\frac{१}{२}$ {अ — (९०° — अ)} =

$\frac{१}{२}\sqrt{(\text{ज्या अ}-\text{को ज्या अ})^{२}+(\text{ज्या अ}-\text{कोज्या अ})^{२}}$

$=\sqrt{\frac{(\text{ज्या अ}-\text{कोज्या अ})^{२}}{२}}$ ।

उक्तं च—

दोःकोटिजीवा विवरस्य वर्गो दलीकृतस्तस्य पदेन तुल्या।
स्यात् कोटिबाह्वोर्विवरार्द्धजीवा..................॥ इति।

प्रक्र० २७। (२३) प्रक्रमतः सिद्धम् कोज्या २ अ = १ — २ ज्या^{२} अ

अस्मिन् इष्टव्यासार्द्धे परिणामिते सिद्धम्,

$$\text{कोज्या } २ \text{ अ} = \text{त्रि} - \frac{२ \text{ ज्या}^{२} \text{ अ}}{\text{त्रि}}$$

वा कोज्या २ अ = ज्या (९०° — २ अ) = ज्या { (९० — अ) — अ }

$$= \text{त्रि} - \frac{\text{ज्या}^{२} \text{ अ}}{\frac{\text{त्रि}}{२}} \text{ एवमनेकधा}$$

---

* अत्र अ, क कोणद्वय योगार्धज्याकोटिज्ययोर्वर्गयोगस्य रूपसमत्वादुभयपक्षवर्गमूलस्थत्रिज्याछेदस्य च नाशादत्र विकारो न भवतीति ज्ञेयम्।

अतएव श्रीभास्करः—

दोर्ज्या कृतिर्व्यासदलार्द्धभक्ता लब्धत्रिमौर्व्योर्विवरेण तुल्या ।
दोःकोटिभागान्तरशिञ्जिनीस्यात् ॥ इति ।

प्रक्र० २८। अथार्द्धांशज्याकोटिज्यानयनार्थमुच्यते ।

$$\text{यतः } १ = \text{कोज्या}^२ \text{ अ} + \text{ज्या}^२ \text{ अ}$$

$$\text{अथ च ज्या}^२ \text{ अ} = २ \text{ ज्या अ. कोज्या अ},$$

$$\therefore १ + \text{ज्या } २ \text{ अ} = \text{कोज्या}^२ \text{ अ} + २ \text{ ज्या अ. कोज्या अ} + \text{ज्या}^२ \text{ अ}$$

$$= (\text{कोज्या अ} + \text{ज्या अ})^२ ।$$

$$१ - \text{ज्या } २ \text{ अ} = \text{कोज्या}^२ \text{ अ} - २ \text{ ज्या अ. कोज्या अ} + \text{ज्या}^२ \text{ व}$$

$$= (\text{कोज्या अ} - \text{ज्या अ})^२,$$

$$\therefore \text{कोज्या अ} + \text{ज्या अ} = \pm \sqrt{१ + \text{ज्या } २ \text{ अ}} \qquad \text{(आ)}$$

$$\text{कोज्या अ} - \text{ज्या अ} = \pm \sqrt{१ - \text{ज्या } २ \text{ अ}} \qquad \text{(का)}$$

(१) अत्र यदि २ अ $<$ ९०° अर्थात् अ $<$ ४५° तदा

तत्समीकरणं ईदृक् स्यात्—

$$\left.\begin{array}{l}\text{कोज्या अ} + \text{ज्या अ} = \sqrt{१ + \text{ज्या } २ \text{ अ}} \\ \text{कोज्या अ} - \text{ज्या अ} = \sqrt{१ - \text{ज्या } २ \text{ अ}}\end{array}\right\} \qquad * \ \text{(पा)}$$

---

* अत्र (पा) (का) इत्यादिसमीकरणचतुष्टये प्रतिसमीकरणं तदुत्तरपक्षस्य धनर्णता अ कोणस्य ४५° अंशेभ्यः १३५° अंशेभ्यो वा न्यूनाधिकभावानुसारमेव निर्णेतव्या। यथा कल्प्यत्ताम्, २ अ $<$ ९०°, $\therefore$ अ $<$ ४५°, ततः (पा) समीकरणद्वये प्रथमसमीकरणस्य द्वितीयपक्षो धनगतः, धनज्याकोटिज्ययोर्योगस्य धनगतत्वात्; द्वितीयसमीकरणस्य द्वितीयपक्षोऽपि धनगतः, ऋणज्यातो धनकोटिज्याया महत्त्वात् । एवं यदा २ अ $>$ ९०° $<$ १८०°, $\therefore$ अ $>$ ४५° $<$ ९०°, तदा (का) समीकरणद्वये प्रथमसमीकरणस्य द्वितीयपक्षो धनगतः, धनज्याकोटिज्ययोर्योगस्य धनत्वात्, द्वितीयसमीकरणस्य द्वितीयपक्ष ऋणगतः, धनकोटिज्यात ऋण ज्या या महत्त्वात् । तथा २ अ $>$ १८०° $<$ २७०, $\therefore$ अ $>$ ९०° $<$ १३५°, तदा (बा) समीकरणद्वये प्रथमसमीकरणस्य द्वितीयपक्षो धनगतः, ऋणकोटिज्यातो धनज्याया महत्त्वात्, द्वितीयसमीकरणस्य द्वितीयपक्ष ऋणगतः, ऋणज्याकोटिज्ययोर्योगस्य ऋणत्वात् । अत्र २ अ कोणस्य तृतीयपदगतत्वेन प्रथमसमीकरणोत्तरपक्षः $= \sqrt{१ - \text{ज्या } २ \text{ अ}}$, द्वितीयसमीकरणोत्तरपक्षः $= \sqrt{१ + \text{ज्या } २ \text{ अ}}$, इति ज्ञेयम् । एवमेव २ अ $>$ २७०° $<$ ३६०°

(२) यदि २ अ $>$ ६०° $<$ १८०° अर्थात् अ $>$ ४५° $<$ ६०°

$$\left.\begin{array}{l}\text{तदा कोज्या अ} + \text{ज्या अ} = \sqrt{१ + \text{ज्या २ अ}}\\ \text{कोज्या अ} - \text{ज्या अ} = -\sqrt{१ - \text{ज्या २ अ}}\end{array}\right\} \quad (\text{फा})$$

∴ अ $>$ १३५° $<$ १८०, तदा (भा) समीकरणद्वये प्रथमसमीकरणस्य द्वितीयपक्ष ऋणगतः, धनज्यात ऋणकोटिज्याया महत्त्वात, द्वितीयसमीकरणस्य द्वितीयपक्ष ऋणगतः, ऋणज्या-कोटिज्ययोर्योगस्य ऋणत्वात् । एवं यदा २ अ कोणस्समकोणचतुष्टयादधिको भवति, तदा अ कोणस्य तृतीयपदगतत्त्वं चतुर्थपदगतत्त्वं वा भवति । अस्यां स्थितौ अ कोणो यस्मिन् पदे भवति तत्पदीयज्याकोटिज्ययोर्धनर्णत्वानुसारमेव (आ) समीकरणद्वितीयपक्षस्य धनर्णत्वमवगन्तव्यम् ।

अथ प्रस्तुतसिद्धान्तस्य व्याप्तिदर्शनाय २१०° अंशाना ज्याकोटिज्ये तद्द्वारा प्रसाध्येते । अत अ = २१०, ∴ २ अ = ४२०°, १८ प्रक्रमस्य टिप्पण्यनुसारं ज्या ४२०° = + ज्या ६०° = $\sqrt{\frac{३}{२}}$ । ततः (आ), (का) अनुसारं,

$$\text{को ज्या अ} + \text{ज्या अ} = \pm\sqrt{१ + \text{ज्या २ अ}} \cdots\cdots (१)$$

$$\text{को ज्या अ} - \text{ज्या अ} = \pm\sqrt{१ - \text{ज्या २ अ}} \cdots\cdots (२)$$

प्रकृते अ कोणस्य तृतीयपदगतत्वेन ऋणकोटिज्याज्ययोर्योगेन (१) समीकरणमृणम् । तदनुसारमुत्थापनेन कोज्या २१०° + ज्या २१०° = $-\sqrt{१ + \text{ज्या } ४२०°}$ = $-\sqrt{१ + \frac{\sqrt{३}}{२}} = -\left(\frac{\sqrt{३}}{२} + \frac{१}{२}\right)$ मूलग्रहणेन तथात्र कोटिज्याया ज्यातो महत्त्वात् (२) समीकरणमृणम् । तदनुसारम्,

$$\text{कोज्या } २१०° - \text{ज्या } २१०° = -\sqrt{१ - \text{ज्या } ४२०°} = -\sqrt{१ - \frac{\sqrt{३}}{२}} =$$

$$-\left(\frac{\sqrt{३}}{२} - \frac{१}{२}\right) \text{ मूलग्रहणेन ।}$$

ततः (१), (२), अनयोर्योगेन, २ कोज्या २१०° =

$$-\sqrt{३}, \quad ∴ \text{ कोज्या } २१० = -\frac{\sqrt{३}}{२}$$

एवम्, (१) अस्मात् (२) अस्य विशोधनेन, २ ज्या २१०° = —१,

∴ ज्या २१०° = $-\frac{१}{२}$ । अत्र अ कोणस्य तृतीयपदगतत्वात् ज्या २१०° = $-$ज्या ३०° = $-\frac{१}{२}$,

कोज्या २१०° = $-$ कोज्या ३०° = $-\frac{\sqrt{३}}{२}$ (१८ प्रक्रमस्य टिप्पण्यनुसारेण) ।

(३) यदि २ अ > १८०° < १७०° अर्थात् अ > ९०° < १३५° तदा

$$\left.\begin{array}{l} \text{कोज्या अ} + \text{ज्या अ} = \sqrt{१ - \text{ज्या २ अ}} \\ \text{कोज्या अ} - \text{ज्या अ} = -\sqrt{१ + \text{ज्या २ अ}} \end{array}\right\} \quad (\text{बा})$$

(४) यदि च २ अ > २७०° < ३६०° अर्थात् अ > १३५° < १८०°

$$\left.\begin{array}{l} \text{तदा कोज्या अ} + \text{ज्या अ} = -\sqrt{१ - \text{ज्या २ अ}} \\ \text{कोज्या अ} - \text{ज्या अ} = -\sqrt{१ \times \text{ज्या २ अ}} \end{array}\right\} \quad (\text{भा})$$

(५)* (पा), (फा) अनयोः प्रत्येकं संकलनव्यवकलनाभ्याम्

$$\text{को ज्या अ} = \tfrac{१}{२}\left(\sqrt{१ + \text{ज्या २ अ}} \pm \sqrt{१ - \text{ज्या २ अ}}\right) \cdots\cdots (१)$$

$$\text{ज्या अ} = \tfrac{१}{२}\left\{\sqrt{१ + \text{ज्या २ अ}} \mp \sqrt{१ - \text{ज्या २ अ}}\right\} \cdots\cdots (२)$$

अत्र यथा नवत्यल्पः कोणः ४५° अंशेभ्यः न्यूनोऽधिको वा स्यात् यथा प्रति समीकरणं द्वितीयपक्षस्थद्वितीयपदचिह्नमूर्ध्वमधरं वा बोध्यम् ।

प्रक्र० २६ ।† शिष्यबुद्धिवैशद्यार्थं अस्मिन् प्रक्रमे ज्यादीनां मानानां वैचित्र्यं प्रदर्श्यंते । तच्च पूर्वोक्तप्रक्रमेभ्यः स्वल्पायासेनोत्पद्यते ।

$$(१)\ \text{ज्या अ} = \sqrt{१ - \text{कोज्या}^{२}\ \text{अ}} = \text{कोज्या अ. स्प अ} = \frac{\text{स्प अ}}{\text{छे अ}}$$

$$= \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{कोस्प अ}} = \frac{१}{\sqrt{१ + \text{कोस्प}^{२}\ \text{अ}}} = \frac{\text{स्प अ}}{\sqrt{१ + \text{स्प}^{२}\ \text{अ}}} = \frac{१}{\text{कोछे अ}}$$

$$= \frac{\text{छे अ . कोज्या अ}}{\text{कोछे अ}} = \frac{\text{स्प अ. कोस्प अ}}{\text{कोछे अ}} = \frac{\sqrt{\text{छे}^{२}\ \text{अ} - १}}{\text{छे अ}} \ ।$$

---

* अत्र (१) समीकरणे (पा) समीकरणद्वयस्य संकलने ऊर्ध्वं व्यवकलने चाधरं चिह्नं वेद्यम् । तथा (२) समीकरणे (फा) समीकरणद्वयस्य संकलने ऊर्ध्वं व्यवकलने चाधरं चिह्नं वेद्यम् । तथैव (१) समीकरणे प्रथमपदे च नवत्यल्पकोणस्य ४५° अंशेभ्यो न्यूनत्वे ऊर्ध्वमधिकत्वे चाधरं चिह्नं वेद्यम् । एवम् (२) समीकरणे द्वितीयपदे च नवत्यल्पकोणस्य ४५° अंशेभ्यो न्यूनत्वे ऊर्ध्वमधिकेत्वे चाधरं चिह्नं वेद्यम् ।

† अत्र २९ प्रक्रमस्थानाम् ३० प्रक्रमस्थानां च (१), (२), (३), इत्यादीनां वैशद्यं ग्रन्थान्ते द्रष्टव्यम् ।

(२) $\text{कोज्या अ} = \dfrac{\text{ज्या अ}}{\text{स्प अ}} = \dfrac{१}{\sqrt{१ + \text{स्प}^२ \text{ अ}}} = \dfrac{१}{\text{छे अ}}$

$= \dfrac{\text{स्प अ. कोस्प अ}}{\text{छे अ}} = \dfrac{\text{ज्या अ. कोछे अ}}{\text{छे अ}} = \text{ज्या अ. कोस्प अ}$

$= \dfrac{\text{कोस्प अ}}{\text{कोछे अ}} = \dfrac{\text{कोस्प अ}}{\sqrt{१ + \text{कोस्प}^२ \text{ अ}}} = \dfrac{\sqrt{\text{कोछे}^२ \text{ अ} - १}}{\text{कोछे अ}}$ ।

(३) $\text{स्प अ} = \dfrac{\text{ज्या अ}}{\sqrt{१ - \text{ज्या}^२ \text{ अ}}} = \dfrac{\sqrt{१ - \text{कोज्या}^२ \text{अ}}}{\text{कोज्या अ}} = \dfrac{१}{\text{कोस्प अ}}$

$= \dfrac{१}{\sqrt{\text{कोछे}^२ \text{ अ} - १}} = \dfrac{\text{कोज्या अ . छे अ}}{\text{कोस्प अ}} = \sqrt{\text{छे}^२ \text{अ} - १}$

$= \dfrac{\text{ज्या अ . कोछे अ}}{\text{कोस्प अ}} = \dfrac{\text{छे अ}}{\text{कोछे अ}} = \dfrac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ . कोस्प}^२ \text{ अ}}$

$* = \dfrac{\sqrt{२ \text{उ अ} - \text{उ}^२ \text{अ}}}{१ - \text{उ अ}}$ ।

(४) $\text{कोस्प अ} = \dfrac{१}{\text{स्प अ}} = \sqrt{\text{कोछे}^२ \text{ अ} - १}$

$= \dfrac{\text{ज्या अ . कोछे अ}}{\text{स्प अ}} = \dfrac{\text{कोज्या अ . छे अ}}{\text{स्प अ}}$

$= \dfrac{\text{कोछे अ}}{\text{छे अ}} = \dfrac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}} = \dfrac{\sqrt{१ - \text{ज्या}^२ \text{अ}}}{\text{ज्या अ}} = \dfrac{\text{कोज्या अ}}{\sqrt{१ - \text{कोज्या}^२ \text{ अ}}}$

$= \dfrac{१}{\sqrt{\text{छे}^२ \text{अ} - १}} = \dfrac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ . स्प}^२ \text{अ}} = \dfrac{१ - \text{उ अ}}{\sqrt{२ \text{ उ अ} - \text{उ}^२ \text{अ}}}$

(५) $\text{छे अ} = \sqrt{१ + \text{स्प}^२ \text{ अ}} = \dfrac{१}{\text{कोज्या अ}} = \dfrac{\text{स्प अ}}{\text{ज्या अ}}$

---

* अत्र $\sqrt{२ \text{ उ अ} - \text{उ}^२ \text{ अ}} = \sqrt{\text{उ अ} \{१ + (१ - \text{उ अ})\}}$

$= \sqrt{(१ - \text{को अ})(१ + \text{को अ})} = \sqrt{१ - \text{को}^२ \text{ अ}} = \sqrt{\text{ज्या}^२ \text{अ}} = \text{अ},$

एवं $१ - \text{उ अ} = \text{को अ} = \text{क}, \therefore \dfrac{\text{अ}}{\text{क}} = \dfrac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}} = \text{स्प अ}$ ।

$$=\frac{१}{ज्या\ अ\ .\ कोस्प\ अ}=\frac{कोछे\ अ}{कोस्प\ अ}=\frac{स्प\ अ\ .\ कोस्प\ अ}{कोज्या\ अ}$$

$$=\frac{ज्या\ अ\ .\ कोछे\ अ}{कोज्या\ अ}=\frac{१}{\sqrt{१-ज्या^२अ}}=\frac{\sqrt{१+कोस्प^२अ}}{कोस्प\ अ}$$

$$=\frac{कोछे\ अ}{\sqrt{कोछे^२अ-१}}=स्प\ अ\ .\ कोछे\ अ=\frac{१}{१-उ\ अ}$$

(६) $$कोछे\ अ=\frac{१}{\sqrt{१-कोज्या^२अ}}=\frac{१}{ज्या\ अ}=\frac{छे\ अ}{स्प\ अ}$$

$$=\frac{कोस्प\ अ}{कोज्या\ अ}=\frac{१}{कोज्या\ अ\ .\ स्प\ अ}=\frac{स्प\ अ\ .\ कोस्प\ अ}{ज्या\ अ}$$

$$=\frac{कोज्या\ अ\ .\ छे\ अ}{ज्या\ अ}=\frac{१}{\sqrt{१-कोज्या^२अ}}=\frac{\sqrt{१+स्प^२अ}}{स्प\ अ}$$

$$=\frac{छे\ अ}{\sqrt{छे^२अ-१}}=कोस्प\ अ.\ छे\ अ.=\frac{१}{\sqrt{२\ उ\ अ-उ^२अ}}$$

(७) $$उ\ अ=१-कोज्या\ अ=१-\sqrt{१-ज्या^२\ अ}$$

$$=१-\frac{१}{\sqrt{१+स्प^२\ अ}}=१-\frac{कोस्प\ अ}{\sqrt{१+कोस्प^२\ अ}}$$

$$=१-\frac{१}{छे\ अ}=१-\frac{\sqrt{कोछे^२\ अ-१}}{कोछे\ अ}$$

प्रक्र० ३० । अस्मिन् प्रक्रमे कोणस्य ज्यादिभ्यो द्विगुणस्य तत्कोणस्य ज्यादीनां मानानि प्रदर्श्यन्ते ।

(१) $$ज्या\ २\ अ=२\ ज्या\ अ\ .\ कोज्या\ अ=\frac{२\ ज्या^२\ अ}{स्प\ अ}=\frac{२\ कोज्या^२\ अ}{कोस्प\ अ}$$

$$=\frac{२\ ज्या\ अ}{छे\ अ}=\frac{२\ कोज्या\ अ}{कोछे\ अ}=\frac{२\ स्प\ अ}{१+स्प^२\ अ}=\frac{२\ स्प\ अ}{छे^२\ अ}$$

$$=\frac{२}{स्प\ अ+कोस्प\ अ}=\frac{२\ कोस्प\ अ}{१+कोस्प^२\ अ}=\frac{२\ कोस्प\ अ}{कोछे^२\ अ}\ ।$$

(२) $$\text{कोज्या } २ \text{ अ} = \text{कोज्या}^{२} \text{ अ} - \text{ज्या}^{२} \text{ अ} = १ - २ \text{ ज्या}^{२} \text{ अ}$$

$$= २ \text{ कोज्या}^{२} \text{ अ} - १ = \frac{१ - \text{स्प}^{२} \text{ अ}}{१ + \text{स्प}^{२} \text{ अ}} = \frac{\text{कोस्प अ} - \text{स्प अ}}{\text{कोस्प अ} + \text{स्प अ}}$$

$$= \frac{\text{कोस्प}^{२} \text{ अ} - १}{\text{कोस्प}^{२} \text{ अ} + १} = \frac{२ - \text{छे}^{२} \text{ अ}}{\text{छे}^{२} \text{ अ}} = \frac{२ \text{ कोज्या अ} - \text{छे अ}}{\text{छे अ}}$$

$$= \frac{\text{कोछे}^{२} \text{ अ} - २}{\text{कोछे}^{२} \text{ अ}} = \frac{\text{कोछे अ} - २ \text{ ज्या अ}}{\text{कोछे अ}} \text{ ।}$$

(३) $$\text{स्प } २ \text{ अ} = \frac{२ \text{ स्प अ}}{१ - \text{स्प}^{२} \text{ अ}} = \frac{२}{\text{कोस्प अ} - \text{स्प अ}} = \frac{२ \text{ ज्या अ. कोज्या अ}}{१ - २ \text{ ज्या}^{२} \text{ अ}}$$

$$= \frac{२ \text{ ज्या अ. कोज्या अ}}{२ \text{ कोज्या}^{२} \text{ अ} - १} = \frac{२ \text{ कोस्प अ}}{\text{कोस्प}^{२} \text{ अ} - १}$$

$$= \frac{२ \text{ स्प अ}}{२ - \text{छे}^{२} \text{अ}} = \frac{२ \text{ कोस्प अ}}{\text{कोछे}^{२} \text{ अ} - २} \text{ ।}$$

(४) $${}^{*}\text{कोस्प } २ \text{ अ} = \frac{१ - \text{स्प}^{२} \text{ अ}}{२ \text{ स्प अ}} = \frac{\text{कोस्प}^{२} \text{ अ} - १}{२ \text{ कोस्प अ}} = \frac{\text{कोस्प अ} - \text{स्प अ}}{२}$$

$$= \frac{१ - २ \text{ ज्या}^{२} \text{ अ}}{२ \text{ ज्या अ. कोज्या अ}} = \frac{२ \text{ कोज्या}^{२} \text{ अ} - १}{२ \text{ ज्या अ. कोज्या अ}}$$

$$= \frac{२ - \text{छे}^{२} \text{ अ}}{२ \text{ स्प अ}} = \frac{\text{कोछे}^{२} \text{ अ} - २}{२ \text{ कोस्प अ}} \text{ ।}$$

(५) $$\text{छे } २ \text{ अ} = \frac{\text{छे}^{२} \text{ अ}}{२ - \text{छे}^{२} \text{अ}} = \frac{\text{छे अ}}{२ \text{ कोज्या अ} - \text{छे अ}} = \frac{१}{२ \text{ कोज्या}^{२} \text{ अ} - १}$$

$$= \frac{१}{१ - २ \text{ ज्या}^{२} \text{ अ}} = \frac{१ + \text{स्प}^{२} \text{ अ}}{१ - \text{स्प}^{२} \text{ अ}} = \frac{\text{कोस्प अ} + \text{स्प अ}}{\text{कोस्प अ} - \text{स्प अ}}$$

---

* अत्र स्प २ अ, कोज्या २ अ, ज्या २ अ, एषामंशहरपरिवर्तनेन कोस्प २ अ, छे २ अ, कोछे २ अ, एषां स्वरूपाणि क्रमेणोत्पद्यन्ते। तथैव कोज्या २ अ स्वरूपाणां रूपाद्विशोधनेन उ २ अ स्वरूपाण्युत्पादनीयानि । एवमेव स्प अ, कोज्या अ, ज्या अ, एषामंशहरपरिवर्तनेन कोस्प अ, छे अ, को छे अ, एषां स्वरूपाणि तथा कोज्या अ स्वरूपाणां रूपाद्विशोधनेन उ अ स्वरूपाण्युत्पद्यन्ते । अत्र अहारराशेरूपं हरः कल्प्यः ।

$$= \frac{\text{कोस्प}^2 \text{ अ} + १}{\text{कोस्प}^2 \text{ अ} - १} = \frac{\text{कोछे}^2 \text{ अ}}{\text{कोछे}^2 \text{ अ} - २} \text{ ।}$$

(६) $\text{कोछे } २ \text{ अ} = \frac{१}{२} \text{ छे अ . कोछे अ} = \frac{\text{छे अ}}{२ \text{ ज्या अ}} = \frac{\text{कोछे अ}}{२ \text{ कोज्या अ}}$

$$= \frac{१}{२ \text{ ज्या अ. कोज्या अ}} = \frac{१ + \text{स्प}^2 \text{ अ}}{२ \text{ स्प अ}} = \frac{\text{छे}^2 \text{ अ}}{२ \text{ स्प अ}}$$

$$= \frac{\text{स्प अ} + \text{कोस्प अ}}{२} = \frac{१ + \text{कोस्प}^2 \text{ अ}}{२ \text{ कोस्प अ}} = \frac{\text{कोछे}^2 \text{ अ}}{२ \text{ कोस्प अ}} \text{ ।}$$

(७) $\text{उ } २ \text{ अ} = २ \text{ ज्या}^2 \text{ अ} = २ - २ \text{ कोज्या}^2 \text{ अ} = \frac{२ \text{ स्प}^2 \text{ अ}}{१ + \text{स्प}^2 \text{ अ}}$

$$= \frac{२ \text{ स्प}^2 \text{ अ}}{\text{छे}^2 \text{ अ}} = \frac{२ \text{ स्प अ}}{\text{स्प अ} + \text{कोस्प अ}} = \frac{२}{१ + \text{कोस्प}^2 \text{ अ}} = \frac{२}{\text{कोछे}^2 \text{ अ}}$$

$$= \frac{२ \text{ ज्या अ}}{\text{कोछे अ}} = २ \frac{\text{छे}^2 \text{ अ} - १}{\text{छे}^2 \text{ अ}} = २ \frac{\text{छे अ} - \text{कोज्या अ}}{\text{छे अ}} \text{ ।}$$

प्रक्र० ३१ । अस्मिन् प्रक्रमे निर्दिष्टांशानां ज्याकोटिज्यानयनं प्रदर्श्यते ।

(१) ४५° अंशानां ज्याकोटिज्यानयनम् ।

∵ (२३) प्रक्रमस्थात् (२) अस्मात्

$२ \text{ ज्या}^2 \text{ अ} = १ - \text{कोज्या } २ \text{ अ}$

तथा $२ \text{ कोज्या}^2 \text{ अ} = १ + \text{कोज्या } २ \text{ अ}$ एवं सिद्धम् ।

∴ यदि अ = ४५° तदा

$२ \text{ ज्या}^2 ४५° = १ - \text{कोज्या } ९०° = १ = २ \text{ कोज्या}^2 \text{ अ}$ ।

∴ $\text{ज्या } ४५° = \pm \frac{१}{\sqrt{२}} = \text{कोज्या } ४५°$

अत्रर्णमानमनुपपन्नत्वान्न ग्राह्यम् ।

(२) ३०° अंशानां ६०° अंशानां च ज्याकोटिज्यानयनम् ।

यदि अ = ३०°, कल्प्येत तदा ज्या २ अ = कोज्या अ स्यात् ।

अथ ∵ ज्या २ अ = २ ज्या अ. कोज्या अ

∴ २ ज्या अ. कोज्या अ = कोज्या अ

∴ ज्या अ = $\frac{१}{२}$ वा, ज्या ३०° = $\frac{१}{२}$ = कोज्या ६०°

कोज्या ३०° = $\sqrt{१ - \text{ज्या}^{२}\, ३०^\circ} = \sqrt{१ - \frac{१}{४}} = \frac{\sqrt{३}}{२}$ = ज्या ६०° ।

(३) १८° अंशानां ७२° अंशानां च ज्याकोटिज्यानयनम् ।

यदि अ = १८° तदा ज्या २ अ = कोज्या ३ अ ।

अथ ज्या २ अ = २ ज्या अ. कोज्या अ । कोज्या ३ अ =

कोज्या अ − ४ ज्या^{२} अ. कोज्या अ ।

∴ २ ज्या अ. कोज्या अ = कोज्या अ − ४ ज्या^{२} अ. कोज्या अ

वा २ ज्या अ = १ − ४ ज्या^{२} अ ∴ ४ ज्या^{२} अ + २ ज्या अ = १

∴ वर्गसमीकरणविधिना सिद्धम् ।

ज्या अ = $\frac{\pm\sqrt{५} - १}{४}$

अत्र ऋणमानमनुपपन्नत्वान्न ग्राह्यम् ।

∴ ज्या १८° = $\frac{\sqrt{५} - १}{४}$ = कोज्या ७२° ।

अत एव कोज्या १८° = $\sqrt{१ - \text{ज्या}^{२}\, १८^\circ} = \sqrt{१ - \left(\frac{\sqrt{५} - १}{४}\right)^{२}}$

$= \sqrt{१ - \frac{६ - २\sqrt{५}}{१६}} = \sqrt{\frac{१० + २\sqrt{५}}{१६}}$

$= \frac{\sqrt{१० + २\sqrt{५}}}{४}$

= ज्या ७२°

(४) ३६° अंशानां ५४° अंशानां च ज्याकोटिज्यानयनम् ।

यदि अ = १८° तदा ज्या २ अ = २ ज्या अ. कोज्या अ

$$\therefore \text{ज्या } ३६° = २\left(\frac{\sqrt{५}-१}{४}\right)\left(\frac{\sqrt{१० + २\sqrt{५}}}{४}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{१०-२\sqrt{५}}}{४} * = \text{कोज्या } ५४° ।$$

अत एव $\text{कोज्या } ३६° = \sqrt{१ - \text{ज्या}^२\ ३६°}$

$$= \sqrt{१ - \frac{१०-२\sqrt{५}}{१६}} = \sqrt{\frac{६+२\sqrt{५}}{१६}} = \frac{\sqrt{५}+१}{४} = \text{ज्या } ५४° ।$$

(५) ३०° एषां १८° एषां चार्धांशज्याकोटिज्यानयनम् ।

तत्र (२८) प्रक्रमोक्तमिदं समीकरणद्वयमुपयुज्यते ।

$$\text{ज्या अ} = \tfrac{१}{२}\left\{\sqrt{१+\text{ज्या २अ}} - \sqrt{१-\text{ज्या २ अ}}\right\}$$

$$\text{कोज्या अ} = \tfrac{१}{२}\left\{\sqrt{१+\text{ज्या २ अ}} + \sqrt{१-\text{ज्या २ अ}}\right\}$$

अत्र यदि २ अ = ३०° अत एव ज्या २ अ = $\frac{१}{२}$

$$\text{तदा ज्या } १५° = \tfrac{१}{२}\left\{\sqrt{१+\tfrac{१}{२}} - \sqrt{१-\tfrac{१}{२}}\right\} = \tfrac{१}{२}\left(\sqrt{\tfrac{३}{२}} - \sqrt{\tfrac{१}{२}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{३}-१}{२\sqrt{२}} = \text{कोज्या } ७५° ।$$

$$\text{कोज्या } १५° = \tfrac{१}{२}\left\{\sqrt{१+\tfrac{१}{२}} + \sqrt{१-\tfrac{१}{२}}\right\} = \tfrac{१}{२}\left\{\sqrt{\tfrac{३}{२}} + \sqrt{\tfrac{१}{२}}\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{३}+१}{२\sqrt{२}} = \text{ज्या } ७५° ।$$

---

* वर्गेण वर्गं गुणयेदित्यादिनियमेन, $(\sqrt{५}-१)^२ \times \sqrt{१० + २\sqrt{५}}$
$= २\sqrt{१०-२\sqrt{५}}$,

अत उक्तस्वरूपम् $= \frac{२ \times २\sqrt{१०-२\sqrt{५}}}{४ \times ४} = \frac{\sqrt{१०-२\sqrt{५}}}{४}$ ।

एवमेव ज्या* ९° $=\frac{\sqrt{५+१}}{४\sqrt{२}}-\frac{\sqrt{५-\sqrt{५}}}{४}=$ कोज्या ८१° ।

कोज्या ९° $=\frac{\sqrt{५+१}}{४\sqrt{२}}+\frac{\sqrt{५-\sqrt{५}}}{४}=$ ज्या ८१° ।

(६) ३° अंशानां ज्याकोटिज्यानयनम् ।

१८° अंशानां १५ अंशानां च ज्याकोटिज्ययोरवगतयोः त्र्यंशानां ज्याकोटिज्ये

ज्या ३° = ज्या (१८° − १५°) = ज्या १८°. कोज्या १५° − कोज्या १८°. ज्या १५°
कोज्या ३° = कोज्या (१८° − १५°) = कोज्या १८°. कोज्या १५° + ज्या १८°. ज्या १५°
अस्मात् सुखेन ज्ञायेते ।

(७) एव त्रिषण्णवादि नवत्यन्तानां अंशाना प्रत्येकं ज्याकोटिज्ये प्रसाध्य बालावबोधार्थ विलिख्य दर्शयामि ।

ज्या ३° $=\frac{\sqrt{३}+१}{८\sqrt{२}}(\sqrt{५}-१)-\frac{\sqrt{३}-१}{८}\sqrt{५+\sqrt{५}}$

= कोज्या ८७°

ज्या ६° $=-\frac{१}{८}(\sqrt{५}+१)+\frac{\sqrt{३}}{४\sqrt{२}}\sqrt{५-\sqrt{५}}$ = कोज्या ८४°

---

* अत्र अ = ९°, ∴ २ अ = १८° तत. २८ प्रक्रमस्थ (पा) अनुसारतः

कोज्या ९° + ज्या ९° $=\sqrt{१+\text{ज्या } १८°}=\sqrt{१+\frac{\sqrt{५}-१}{४}}=\sqrt{\frac{३+\sqrt{५}}{४}}$

$=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{५}+१}{\sqrt{२}}\right)^{२}\times\frac{१}{४}}=\frac{\sqrt{५}+१}{२\sqrt{२}}$, मूलग्रहणेन ‥ (१)

एवं कोज्या ९° − ज्या ९° $=\sqrt{१-\text{ज्या } १८°}$

$=\sqrt{१-\frac{\sqrt{५}-१}{४}}=\frac{\sqrt{५-\sqrt{५}}}{२}$ ‥ (२) ततः (१), (२)

अनयोर्योगे द्विभक्ते कोज्या ९° अस्य स्वरूप निष्पद्यते । तथा (१) अस्मात् (२) अस्मिन् विशोधिते द्विभक्ते च ज्या ९° एतत्स्वरूपमुपपद्यते ।

ज्या $६^\circ = \frac{१}{४\sqrt{२}}(\sqrt{५}+१) - \frac{१}{४}\sqrt{५-\sqrt{५}}$ $=$ कोज्या ८१°

ज्या $१२^\circ = -\frac{\sqrt{३}}{८}(\sqrt{५}-१) + \frac{१}{४\sqrt{२}}\sqrt{५+\sqrt{५}}$ $=$ कोज्या ७८°

ज्या $१५^\circ = -\frac{१}{२\sqrt{२}}(\sqrt{३}-१)$ $=$ कोज्या ७५°

ज्या $१८^\circ = \frac{१}{४}(\sqrt{५}-१)$ $=$ कोज्या ७२°

ज्या $२१^\circ = -\frac{\sqrt{३}-१}{८\sqrt{२}}(\sqrt{५}+१) + \frac{\sqrt{३}+१}{८}\sqrt{५-\sqrt{५}}$

$=$ कोज्या ६९°

ज्या $२४^\circ = \frac{\sqrt{३}}{८}(\sqrt{५}+१) - \frac{१}{४\sqrt{२}}\sqrt{५-\sqrt{५}}$ $=$ कोज्या ६६°

ज्या $२७^\circ = -\frac{१}{४\sqrt{२}}(\sqrt{५}-१) + \frac{१}{४}\sqrt{५+\sqrt{५}}$ $=$ कोज्या ६३°

ज्या $३०^\circ = \frac{१}{२}$ $=$ कोज्या ६०°

ज्या $३३^\circ = \frac{\sqrt{३}+१}{८\sqrt{२}}(\sqrt{५}-१) + \frac{\sqrt{३}-१}{८}\sqrt{५+\sqrt{५}}$

$=$ कोज्या ५७°

ज्या $३६^\circ = \frac{१}{२\sqrt{२}}\sqrt{५-\sqrt{५}}$ $=$ कोज्या ५४°

ज्या $३९^\circ = \frac{\sqrt{३}+१}{८\sqrt{२}}(\sqrt{५}+१) - \frac{\sqrt{३}-१}{८}\sqrt{५-\sqrt{५}}$ $=$ कोज्या ५१°

ज्या $४२^\circ = \frac{१}{८}(\sqrt{५}-१) + \frac{\sqrt{३}}{४\sqrt{२}}\sqrt{५+\sqrt{५}}$ $=$ कोज्या ४८°

ज्या $४५^\circ = \frac{१}{\sqrt{२}}$ $=$ कोज्या ४५°

ज्या $४८^\circ = \frac{\sqrt{३}}{८}(\sqrt{५}-१) + \frac{१}{४\sqrt{२}}\sqrt{५+\sqrt{५}}$ $=$ कोज्या ४२°

ज्या $५१^\circ = \frac{\sqrt{३}-१}{८\sqrt{२}}(\sqrt{५}+१) + \frac{\sqrt{३}+१}{८}\sqrt{५-\sqrt{५}}$ $=$ कोज्या ३९°

$$\text{ज्या } ५४^\circ = \frac{१}{४}(\sqrt{५}+१) \qquad = \text{कोज्या } ३६^\circ$$

$$\text{ज्या } ५७^\circ = -\frac{\sqrt{३}-१}{८\sqrt{२}}(\sqrt{५}-१) + \frac{\sqrt{३}+१}{८}\sqrt{५+\sqrt{५}} \qquad = \text{कोज्या } ३३^\circ$$

$$\text{ज्या } ६०^\circ = \frac{\sqrt{३}}{२} \qquad = \text{कोज्या } ३०^\circ$$

$$\text{ज्या } ६३^\circ = \frac{१}{४\sqrt{२}}(\sqrt{५}-१) + \frac{१}{४}\sqrt{५+\sqrt{५}} \qquad = \text{कोज्या } २७^\circ$$

$$\text{ज्या } ६६^\circ = \frac{१}{८}(\sqrt{५}+१) + \frac{\sqrt{३}}{४\sqrt{२}}\sqrt{५-\sqrt{५}} \qquad = \text{कोज्या } २४^\circ$$

$$\text{ज्या } ६९^\circ = \frac{\sqrt{३}+१}{८\sqrt{२}}(\sqrt{५}+१) + \frac{\sqrt{३}-१}{८}\sqrt{५-\sqrt{५}} \qquad = \text{कोज्या } २१^\circ$$

$$\text{ज्या } ७२^\circ = \frac{१}{२\sqrt{२}}\sqrt{५+\sqrt{५}} \qquad = \text{कोज्या } १८^\circ$$

$$\text{ज्या } ७५^\circ = \frac{१}{२\sqrt{२}}(\sqrt{३}+१) \qquad = \text{कोज्या } १५^\circ$$

$$\text{ज्या } ७८^\circ = \frac{१}{८}(\sqrt{५}-१) + \frac{\sqrt{३}}{४\sqrt{२}}\sqrt{५+\sqrt{५}} \qquad = \text{कोज्या } १२^\circ$$

$$\text{ज्या } ८१^\circ = \frac{१}{४\sqrt{२}}(\sqrt{५}+१) + \frac{१}{४}\sqrt{५-\sqrt{५}} \qquad = \text{कोज्या } ९^\circ$$

$$\text{ज्या } ८४^\circ = \frac{\sqrt{३}}{८}(\sqrt{५}+१) + \frac{१}{४\sqrt{२}}\sqrt{५-\sqrt{५}} \qquad = \text{कोज्या } ६^\circ$$

$$\text{ज्या } ८७^\circ = \frac{\sqrt{३}-१}{८\sqrt{२}}(\sqrt{५}-१) + \frac{\sqrt{३}+१}{८}\sqrt{५+\sqrt{५}} \qquad = \text{कोज्या } ३^\circ$$

$$\text{ज्या } ९०^\circ = १ \qquad = \text{कोज्या } ०^\circ$$

प्रक्र० ३२। अथ कोणीयज्यादीना सारण्युत्पादनप्रकारः।

(१) तत्रादौ एककलाया ज्याकोटिज्यानयनम्।

$$\text{ज्या अ} = \frac{१}{२}\left\{\sqrt{१+\text{ज्या } २ \text{ अ}} - \sqrt{१-\text{ज्या } २ \text{ अ}}\right\}$$ अत्र यदि

२ अ = १५ अत एव ज्या २ अ = $\frac{\sqrt{३}-१}{२\sqrt{२}}$ = '२५८८१९०४५१०२ इत्यादि,

तदा ज्या $\frac{१५^\circ}{२}$ = '१३०५२६१६२२२० इत्यादि = $ज_१$

---

* अत्र ज्या १५° = $\frac{\sqrt{३}-१}{२\sqrt{२}}$, एवं वर्गमूलानयनविधिना $\sqrt{३}$ = १'७३२······,

तथा $\sqrt{२}$ = १'४१४ ∴ ज्या १५° = $\frac{१'७३२ \quad -१}{२\times१'४१४\cdots}$

= $\frac{७३२}{२'८२८}$ = '२५८८ ।

ततः क्रमोत्क्रमज्या कृतियोगमूलादित्यादिना २८ प्रक्रमोक्तसमीकरणोपयोगेन वा, त्रिज्योत्क्रमज्यानिहतेर्दलस्येत्यादिना वा या अग्रे तत्तदंशानां स्वाभाविकज्या महतायासेन प्रसाधितास्ताः केवलं चेम्बर्स घाताङ्कसारणीतोऽवलोकनेनैवावगता भवन्ति । यथोक्तसारणीत. ज्या १५° = '२५८८१९०, ज्या $\frac{१५}{२}$ = ज्या ७।३०′ = .१३०५२६२, ज्या $\frac{१५}{२^२}$= ज्या ३°।४५′=.०६५४०३१ एवं ज्या १′=.०००२९०९, एता अङ्कसप्तकं यावत्पूर्वप्रसाधितज्याभिस्तुल्या एव सन्ति । अतो गणितसौकर्यार्थं चेम्बर्स घाताङ्कसारण्याः परिशिष्टोक्तोपयोगविधिज्ञानमत्यावश्यकं भवति । किं च यदा विकलान्तचापमानं ३°।१५′ अस्मादधिकं न भवति, तदा परिशिष्टोक्तसूक्ष्मचापज्यानयनविधिना पूर्वं विकलान्तचापस्य घातमापकज्यां प्रसाध्य ततः सा स्वाभाविकज्यायां परिवर्तनीया । एवमङ्कसप्तकं यावज्ज्यायाः सूक्ष्मता सम्पद्यते । अयं परिवर्तनविधिरपि परिशिष्टे निर्दिष्टोऽस्ति । तदनुसारमत्र १′ कलायाः परिशिष्टोक्तसूक्ष्मचापज्यासाधनप्रकारेण १०००००० अस्मिन्व्यासार्धे ज्या प्रसाध्यते । अत्र १′=६०″, अस्य प्रघातमापकः=१.७७८१५१३

स्थिरप्रघातमापकः=४.६८५५७४९

योगः=६.४६३७२६२ इयमेककलाया घातमापक ज्या, परिशिष्टोक्तनियमानुसारमस्या. स्वाभाविकज्यायां परिवर्तितस्वरूपम्=४.२९०८८ =.०००२९०९ । अथैतत्प्रसाधितैककलाज्यास्वरूपतोऽनुपातेन $\frac{१५^\circ}{२^९}$, $\frac{१५^\circ}{२^{१०}}$ इत्यादीनां ज्याः सिद्धयन्तीति स्फुटम् । अनुपातस्वरूपं ग्रन्थे प्रदर्शितं वर्तते ।

पुनः यदि $ज_{१}$ अनेन २अ इदमुत्थाप्यते, तदा

$ज्या \frac{१५^{\circ}}{२^{२}} = .०६५४०३१२६२३०$ इत्यादि $= ज_{२}$

एवं मुहुरर्द्धांशज्यायां गृहीतायाम् अग्रे

$ज्या \frac{१५^{\circ}}{२^{९}} = .०००५११३२६६०१$ इत्यादि $= ज_{९}$

$ज्या \frac{१५^{\circ}}{२^{१०}} = .०००२५५६६३४५०$ इत्यादि $= ज_{१०}$ एवमुत्पद्यते

अत्र $ज_{१०}$ इयं $ज_{९}$ अस्या अर्द्धेन समं भवतीति स्पष्टं दृश्यते

अनेनेदमनुमीयते सूक्ष्मकोणयोरेकस्य यत्सख्यापूरणों शस्तज्ज्या भवति तत्संख्यापूरणोंऽशोऽपरकोणस्यापि स्वल्पान्तरा तज्ज्या भवति, अतः

$$\frac{१५ \times ६०}{२^{१०}} : ज्या \frac{१५^{\circ}}{२^{१०}} :: १' : ज्या\ १'$$

$$\therefore ज्या\ १' = ज्या \frac{१५^{\circ}}{२^{१०}} \times \frac{२^{१०}}{१५ \times ६०} = .०००२५५६६३४५०\ इ० \times \frac{२५६}{२२५}$$

$$= .०००२९०८८८१९२\ इत्यादि ।$$

अथ च $\because$ $कोज्या\ अ = \sqrt{१ - ज्या^{२}\ अ}$

$$\therefore कोज्या\ १' = \sqrt{१ - (.०२९०८८८१९२\ इ.)^{२}}$$

$$= .९९९९९९९५७७९२\ इत्यादि ।$$

(२) द्वित्र्यादीनाम् कलानां अंशानां च ज्याकोटिज्यानयनम् ।

यतः $ज्या\ (अ + क) = २^{*}\ ज्या\ अ.\ कोज्या\ क - ज्या\ (अ - क)$

$= २\ ज्या\ अ \{ ^{\dagger}१ - २\ ज्या^{२} \frac{१}{२} क \} - ज्या\ (अ - क)$

$= २\ ज्या\ अ - ज्या\ (अ - क) - ४\ ज्या\ अ.\ ज्या^{२} \frac{१}{२} क$

---

* २० प्रक्रमस्थ (चा) समीकरणपक्षाभ्यां ज्या (अ—क) अस्य वियोजनेन स्फुटम् ।

† अत्र २४ प्रक्रमतः $\because २\ ज्या^{२} \frac{१}{२} क = १ - कोज्या\ क$

$\therefore कोज्या\ क = १ - २\ ज्या^{२} \frac{१}{२} क$ ।

अतः यद्यत्र $क=१'$ तथा $अ=$एक द्वित्र्यादिकलाः तदा

$$कोज्या\ २' = कोज्या\ १' - (कोज्या ० - कोज्या\ १') - ४\ कोज्या\ १' \times ज्या^{२}\ ३०''।$$

$$कोज्या\ ३' = कोज्या\ २' - (कोज्या\ १' - कोज्या\ २') - ४\ कोज्या\ २' \times ज्या^{२}\ ३०''।$$

$$कोज्या\ ४' = कोज्या\ ३' - (कोज्या\ २' - कोज्या\ ३') - ४\ कोज्या\ ३' \times ज्या^{२}\ ३०''$$ इत्यादि।

अतोऽपि $४\ ज्या^{२}\ ३०''$ एतन्मानज्ञानात् द्वित्र्यादिकलानां कोटिज्यावगमः सुगमः, तथा एकांशस्य कोटिज्यायां त्रिशत्कलाना च जीवायां ज्ञातायां द्वित्र्यादिकांशानामपि कोटिज्याज्ञानं सुलभम्।

(३) द्वित्र्याद्यंशानां प्रकारान्तरेण ज्याकोटिज्यानयनम्।

पूर्वं, $ज्या\ २\ अ = २\ ज्या\ अ.\ कोटिज्या\ अ$
$कोज्या\ २\ अ = २\ कोज्या^{२}\ अ - १$ } *आभ्या अंशद्वयस्य ज्याकोटिज्ये विज्ञाय

ततः $$ज्या\ (अ+क)^{‡} = \frac{(ज्या\ अ + ज्या\ क)\ (ज्या\ अ - ज्या\ क)}{ज्या\ (अ - क)}$$

$$कोज्या\ (अ+क) = \frac{(कोज्या\ अ + ज्या\ क)\ (कोज्या\ अ - ज्या\ क)}{कोज्या\ (अ - क)}$$

आभ्यां त्र्याद्यंशानां ज्याकोटिज्याज्ञानं सुगमम्। तथाहि,

$$ज्या\ ३^{\circ} = \frac{(ज्या\ २^{\circ} + ज्या\ १^{\circ})\ (ज्या\ २^{\circ} - ज्या\ १^{\circ})}{ज्या\ १^{\circ}}$$

$$ज्या\ ४^{\circ} = \frac{(ज्या\ ३^{\circ} + ज्या\ १^{\circ})\ (ज्या\ ३^{\circ} - ज्या\ १^{\circ})}{ज्या\ २^{\circ}}$$ इत्यादि।

$$कोज्या\ ३^{\circ} = \frac{(कोज्या\ २^{\circ} + ज्या\ १^{\circ})\ (कोज्या\ २^{\circ} - ज्या\ १^{\circ})}{कोज्या\ १^{\circ}}$$

---

* ३१ प्रक्रमस्थ (१) अनुसारतो ज्याकोटिज्ये विज्ञेये।

‡ अत्र २० प्रक्रमस्थ (१), (२), अनयोर्वधतः स्वरूपमिदं निष्पद्यते। तदग्रिमं स्वरूपं (३), (४) अनयोर्वधतः सिध्यति।

$$\text{कोज्या } ४^\circ = \frac{(\text{कोज्या } ३^\circ + \text{ज्या } १^\circ)(\text{कोज्या } ३^\circ - \text{ज्या } १^\circ)}{\text{कोज्या } २^\circ}$$ इत्यादि ।

अनयैव युक्त्या सैकद्व्यादिकलाना एकद्वित्र्याद्यंशानां ज्याकोटिज्यावगमः सुगमः । तथाहि,

$$\text{ज्या } (१^\circ, १') = \frac{(\text{ज्या } १^\circ + \text{ज्या } १')(\text{ज्या } १^\circ - \text{ज्या } १')}{\text{ज्या } ५९'}$$

$$\text{ज्या } (१^\circ, २') = \frac{(\text{ज्या } १^\circ + \text{ज्या } २')(\text{ज्या } १^\circ - \text{ज्या } २')}{\text{ज्या } ५८'}$$ इत्यादि ।

$$\text{कोज्या } (१^\circ, १') = \frac{(\text{कोज्या } १^\circ + \text{ज्या } १')(\text{कोज्या } १^\circ - \text{ज्या } १')}{\text{कोज्या } ५९'}$$

$$\text{कोज्या } (१^\circ, २') = \frac{(\text{कोज्या } १^\circ + \text{ज्या } २')(\text{कोज्या } १^\circ - \text{ज्या } २')}{\text{कोज्या } ५८'}$$

इत्यादि ।

(४) एवमनेन विधिना त्रिंशदंशपर्यन्ताना सकलानामंशानां ज्याकोटिज्ये प्रसाध्याग्रे

ज्या (अ + क) = २ ज्या अ . कोज्या क — ज्या (अ – क)

कोज्या (अ + क) = कोज्या (अ — क) – २ ज्या अ. ज्या क

एतदाधारतः सुखेन ज्याकोटिज्ये अवगन्तव्ये ।

तथा हि, यदि अ = ३०° । क = एक द्वित्र्यादि कलाः

तदा २ ज्या अ = १ ।

∴ ज्या (३०°।१′) = कोज्या १′ – ज्या २९°।५९′ ।

ज्या (३०°।२′) = कोज्या २′ – ज्या २९°।५८′ । इत्यादि ।

कोज्या (३०°।१′) = कोज्या २९°।५९′ – ज्या १′

कोज्या (३०°।२′) = कोज्या २९°।५८′ – ज्या २′ इत्यादि ।

एवमिह केवलं व्यवकलनेन ज्याकोटिज्यावगमः ।

(५) एवं पञ्चचत्वारिंशदंशपर्यन्तानां सकलांशानां ज्याकोटिज्याः साध्याः ।

तदनन्तरम्,

यतः, ज्या (४५° + अ) = कोज्या (४५° − अ)

कोज्या (४५° + अ) = ज्या (४५° − अ)

अतो या एव ४५° पर्यन्तानां सकलांशाना ज्याः कोटिज्याश्च ता एव प्रातिलोम्येन पञ्चचत्वारिंशदंशाधिकाना सकलांशानां कोटिज्या ज्याश्च भवन्ति, इति बोध्यम् ।

एवं सकलाना नवत्यंशानां ज्याकोटिज्यावगमात् तत्सारणीसंपादनं सुशकम् ।

(६) यतः ज्या (९०° + अ) = + कोज्या अ ।

कोज्या (९०° + अ) = − ज्या अ ।

ज्या (१८०° + अ) = − ज्या अ ।

कोज्या (१८०° + अ) = − कोज्या अ ।

ज्या (२७०° + अ) = − कोज्या अ ।* कोज्या (२७०° + अ) + ज्या अ ।

अतो नवत्यंशपर्यन्ताना अंशाना ज्या कोटिज्या सारणीत एव नवत्यधिकानामप्यंशाना ज्या कोटिज्यावगमः ।

(७) स्पर्शरेखाणां कोटिस्पर्शरेखाणां च सारणीसंपादनम् :

$$\text{स्प अ} = \frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}} \text{ । कोस्प अ} = \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}} \text{ ।}$$

एतदाधारतः सुशकम् ।

---

* अत्र ९०° + अ = य इति कल्पिते २७०° + अ = १८०° + य, अतः ज्या (२७०° + अ) = ज्या (१८०° + य) = − ज्या य = − ज्या (९०° + अ) = − कोज्या अ (१८ प्रक्र.) । एवं कोज्या (२७०° + अ) = कोज्या (१८०° + य) = − कोज्या य = − कोज्या (९०° + अ) = − (− ज्या अ) = + ज्या अ । सर्वमेतत्षोडशप्रक्रमेणैवोपपद्यते । परमत्र (२७०° + अ) अस्य कोणस्य चतुर्थपदगतत्वेन तत्पदानुसारमुक्तकोणस्य ज्याकोटिज्ययोर्धनर्णत्वमेवं भवति । यथा, द्वितीयपदे चतुर्थपदे च स्पर्धिचापस्यैव ज्याकोटिज्ये प्रसाध्येते । ८ प्रक्रमस्य (१) अनुमानानुसारं साशीतिशताधिकचापस्य स्पर्धी ऋणगतो भवति । अतश्चतुर्थपदे ऋणस्पर्धिचापस्य ज्या ऋणगता कोटिज्या च धनगता भवति । किं वा दिगानुलोम्यप्रातिलोम्यानुसारं ज्याकोटिज्ययोर्धनर्णत्वं चतुर्थपदे ज्ञेयम् ।

(८) एवं छेदनरेखाणां कोटिच्छेदनरेखाणां च उत्क्रमज्यानां कोट्युत्क्रमज्यानां च सारणी

छे अ $= \frac{१}{\text{को ज्या अ}}$ । कोछे अ $= \frac{१}{\text{ज्या अ}}$ । उ अ $=$ १ — कोज्या अ ।

कोउ अ $=$ १ — ज्या अ ।

आभ्यश्चैतसूत्रेभ्यस्तत्तदुन्मितिभ्यः संपादयितुं सुशका ।

इति कोणीयज्यादीनां सारण्युत्पादन प्रकारः ।

प्रक्र० ३३ । पूर्वसाधितज्यादीनां गुणनभजनाद्यपेक्ष्य तद्घातप्रमापकानां गुणनभजनादिकेऽत्यल्पायासः स्यात् । किन्तु कोणीयज्यादीनां प्रायः एकाल्पत्वात्तद्घातप्रमापका ऋणगता भवन्ति । अतः कोणीय ज्याद्याः *१०[१०] एतद्द्वयासार्द्धपरिणताः कृत्वा तादृशानां घातप्रमापकाः गणितलाघवाय सारण्यां लिख्यन्ते ।

अथ कतिचन द्वितीयाध्यायसम्बन्धिनः प्रश्ना. सोत्तराः ।

(१) उदाहरणम् ।

ज्या ५०° — ज्या ७०° + ज्या १०° = ०, इति कथम् ?

अत्र ज्या ५०° = ज्या (६०° — १०°),

ज्या ७०° = ज्या (६०° + १०°), ततः १६ प्रक्रमतः,

ज्या (६०° — १०°) $= \frac{\sqrt{३}}{२}$ × कोज्या १०° — $\frac{१}{२}$ × ज्या १०° .... (१)

ज्या (६०° + १०°) $= \frac{\sqrt{३}}{२}$ × कोज्या १० + $\frac{१}{२}$ × ज्या १०° .... (२)

(१) — (२) = — ज्या १०°, ∴ — ज्या १०° + ज्या १०° = ० ।

अथवा, ५०° = अ, ७०° = क, कल्प्यते, ततः २२ प्रक्रमस्य

(फा) इत्यनुसारतः,

ज्या अ — ज्या क = ज्या ५०° — ज्या ७०° =

२ को ज्या $\frac{५०° + ७०°}{२}$ × ज्या $\frac{\text{ज्या } ५०° — ७०°}{२}$

---

* अतएव घातमापकगणितनियमेन १०[१०] अस्याः संख्याया घातमापकः १० (= त्रिज्या) अयमङ्कोघातमापकाऽभिन्नभागे शून्यस्थाने स्थाप्यते । तथैव $\overline{१}$ स्थाने ९, $\overline{२}$ स्थाने ८, $\overline{३}$ स्थाने ७ अयमङ्कः स्थाप्यते । एवमग्रेऽपि ज्ञेयम् ।

$= २$ कोज्या $६०° \times$ ज्या $(-१०°)$

$= २ \times \frac{१}{२} \times$ ज्या $(-१०°) = -$ ज्या $१०°$,

$\therefore -$ ज्या $१०° +$ ज्या $१०° = ०$ ।

(२) उदाहरणम् ।

ज्या $४२०° \times$ कोज्या $३९०° -$ कोज्या $(-३००°)$

$\times$ ज्या $(-३३०°) = १$, इतिकथम् ।

ज्या $४२०° =$ ज्या $(४२०° - ३६०°) =$ ज्या $६०° = \frac{\sqrt{३}}{२} =$ अ,

कोज्या $३९०° =$ कोज्या $(३९०° - ३६०°) =$ कोज्या $३०° = \frac{\sqrt{३}}{२} =$ इ

$\therefore$ अ $\times$ इ $= \frac{\sqrt{३}}{२} \times \frac{\sqrt{३}}{२} = \frac{३}{४}$,

कोज्या $(-३००°) =$ कोज्या $(१८०° + १२०°)$, (१७ प्रक्रमतः)

$= -$ को ज्या $१२०°$, (१८ प्रक्र.)

$= -$ कोज्या $(१८०° - ६०°) = +$ कोज्या $६०°$

$= + \frac{१}{२}$, (१८ प्रकमतः) $=$ क,

ज्या $(-३३०°) = -$ ज्या $(१८०° + १५०°) = +$ ज्या $१५०°$

$= +$ ज्या $(१८०° - ३०°)$

$= +$ ज्या $३०° = + \frac{१}{२} =$ ग, $\therefore$ क $\times$ ग $= \frac{१}{२} \times \frac{१}{२} = + \frac{१}{४}$,

$\therefore$ अ $\times$ इ $+$ क $\times$ ग $= \frac{३}{४} + \frac{१}{४} = १$ ।

(३) उदाहरणम् ।

छे $(२७०° -$ अ$) \times$ छे $(९०° -$ अ$) -$ स्प $(२७०° -$ अ$) \times$ स्प $(९०° +$ अ$) + १$

$= ०$, इति कथम् ।

१८ प्रक्रमतः, छे $(२७०° -$ अ$) =$ छे $\{ १८०° + (९०° -$ अ$) \}$

$= -$ छे $(९०° -$ अ$)$ तृतीयपदानुसारं $= -$ कोछे अ $= -$अ,

छे $(९०° -$ अ$) =$ कोछे अ $=$ इ, $\therefore -$अ $\times$ इ $= -$ कोछे^{२} अ,

स्प $(२७०° -$ अ$) =$ स्प $\{ १८०° + (९०° -$ अ$) \}$

$= +$ स्प $(९०° -$ अ$)$ तृतीयपदानुसारं $= +$ कोस्प अ $=$ क,

स्प $(९०^\circ+$ अ$)=-$ कोस्प अ $=-$ग, $\therefore$ क $\times -$ग $=-$कोस्प^2 अ,

$\therefore$ $१-($क $\times -$ग$)-$अ $\times$ इ $=१-(-$कोस्प^2 अ$)-$कोछे^{2} अ,

$\because$ $+$कोस्प^2 अ $=$ कोछे^{2} अ, $\therefore$ $१+$कोस्प^2 अ $-$ कोछे^{2} अ $=०$ ।

(४) उदाहरणम् ।

कोज्या अ $\times$ कोज्या (य $-$ अ) $-$ ज्या अ $\times$ ज्या (य $-$ अ) $=$ कोज्या य,
इतिकथम् ।

अत्र, य $-$ अ $=$ क, इतिकल्पिते, अत उक्तप्रश्नस्वरूपं $=$

कोज्या अ $\times$ कोज्या क $-$ ज्या अ $\times$ ज्या क $=$ कोज्या (अ $+$ क), प्रक्रम १६,

तत उत्थापनेन कोज्या (अ $+$ क) $=$ कोज्या (अ $+$ य $-$ अ)

$=$ कोज्या य इत्युपपन्नम् ।

(५) उदाहरणम् ।

ज्या ७५° $-$ ज्या १५° $=$ कोज्या १०५° $+$ कोज्या १५°, इति कथम् ।

अत्र, ज्या ७५° $=$ ज्या $(१८०^\circ-७५^\circ)$ $=$ ज्या १०५°

$=$ ज्या $(९०^\circ+१५^\circ)$ $=$ कोज्या १५° (१८ प्रक्रमेण) $=$ क,

एवं $-$ ज्या १५° $=-$ कोज्या ७५° $=-$कोज्या $(१८०^\circ-७५^\circ)$

$=+$कोज्या १०५° $=$ अ,

अथवा $-$ ज्या १५° $=$ कोज्या $(९०^\circ+१५^\circ)$ $=$ कोज्या १०५°, १८ प्रक्रमेण,

$\therefore$ अ $+$ क $=$ कोज्या १०५° $+$ कोज्या १५°, इति सिध्यति ।

(६) उदाहरणम् ।

यदि स्प अ $=\frac{\sqrt{३}}{४-\sqrt{३}}$, स्प क $=\frac{\sqrt{३}}{४+\sqrt{३}}$, तदा स्प (अ $-$ क) अस्य मानं किम् ।

अत्र २० प्रक्रमस्य (२) अस्मिन् (४) अनेन भक्ते स्प (अ $-$ क)

$$=\frac{\text{स्प अ}-\text{स्प क}}{१+\text{स्प अ}\times\text{स्प क}},$$

तदनुसारतः, स्प अ $-$ स्प क $=\frac{\sqrt{३}}{४-\sqrt{३}}-\frac{\sqrt{३}}{४+\sqrt{३}}=\frac{६}{१३}=$ क,

$$१ + \text{स्प अ} \times \text{स्प क} = १ + \frac{\sqrt{३}}{४-\sqrt{३}} \times \frac{\sqrt{३}}{४+\sqrt{३}} = १ + \frac{३}{१३} = \frac{१६}{१३} = \text{ख},$$

$$\therefore \frac{\text{क}}{\text{ख}} = \frac{६}{१३} \times \frac{१३}{१६} = \cdot ३७५ \text{ ।}$$

(७) उदाहरणम् ।

२ज्या ४५° × ज्या ३०°, स्वरूपमिदमन्तररूपेण प्रदर्श्यताम् ।

अत्र, अ = ४५°, क = ३०° तदा २० प्रक्रमस्य (झा) अनुसारेण,

२ज्या ४५° × ज्या ३०° = २ज्या अ × ज्या क

= कोज्या (अ − क) — कोज्या (अ + क),

उत्थापनेन, २ ज्या ४५° × ज्या ३०° = कोज्या (४५° − ३०°)

− कोज्या (४५° + ३०°)

= कोज्या १५° − कोज्या ७५° ।

(८) उदाहरणम् ।

$$\frac{\text{ज्या ८ अ} \times \text{कोज्या अ} - \text{ज्या ६ अ} \times \text{कोज्या ३ अ}}{\text{कोज्या २ अ} \times \text{कोज्या अ} + \text{ज्या ३ अ} \times \text{ज्या ४ अ}} = \text{स्प २ अ, इति कथम् ।}$$

२० प्रक्रमोक्त (चा) अनुसारतोंऽशस्वरूपं

= ½(ज्या ९ अ + ज्या ७ अ) − ½(ज्या ९ अ + ज्या ३ अ),

हरस्वरूपं क्रमेण (जा), (झा) अनुसारेण

= ½(कोज्या ३ अ + कोज्या अ) + ½(कोज्या ७ अ — कोज्या अ)

$$= \frac{\text{ज्या ७ अ} - \text{ज्या ३ अ}}{\text{कोज्या ३ अ} + \text{कोज्या ७ अ}} = \frac{\text{२ कोज्या ५ अ} \times \text{ज्या २ अ}}{\text{२ कोज्या ५ अ} \times \text{कोज्या २ अ}}$$

२० प्रक्रमेण, = स्प २अ, इत्युपपद्यते ।

(९) उदाहरणम् ।

ज्या १०° + ज्या २०° + ज्या ४०° + ज्या ५०°

= ज्या ७०° + ज्या ८०°, इति कथम् ।

अत्र, ज्या ४०° = ज्या (१८०° − ४०°), एवं ज्या ५०° = ज्या (१८०° − ५०°),

∴ ज्या १०° + ज्या १३०° = २ज्या ७०° × कोज्या ६०° (२० प्रक्रमेण)

= २ज्या ७०° × ½ = ज्या ७०°, = अ,

$$\text{एवं ज्या } २०^\circ + \text{ज्या } १४०^\circ = २\text{ज्या } ८०^\circ \times \text{कोज्या } ६०^\circ$$

$$= २\text{ज्या } ८०^\circ \times \tfrac{१}{२} = \text{ज्या } ८०^\circ = \text{क},$$

$\therefore$ अ + क = ज्या ७०° + ज्या ८०°, इति सिध्यति।

(१०) उदाहरणम्।

$$\frac{\text{छे } ८\text{य} - १}{\text{छे } ४\text{य} - १} = \frac{\text{स्प } ८\text{य}}{\text{स्प } २\text{य}},\ \text{इति कथम्।}$$

$$\text{अत्र, छे } ८\text{य} - १ = \frac{१ - \text{कोज्या } ८\text{य}}{\text{कोज्या } ८\text{य}} = \frac{२\text{ज्या}^२ ४\text{य}}{\text{कोज्या } ८\text{य}} = \text{अ (२४ प्रक्रमेण)},$$

$$\text{एवं छे } ४\text{य} - १ = \frac{१ - \text{कोज्या } ४\text{य}}{\text{कोज्या } ४\text{य}} = \frac{२\text{ज्या}^२ २\text{य}}{\text{कोज्या } ४\text{य}} = \text{क}.$$

$$\therefore \frac{\text{अ}}{\text{क}} = \frac{२\text{ज्या}^२ ४\text{य} \times \text{कोज्या } ४\text{य}}{\text{कोज्या } ८\text{य} \times २\text{ज्या}^२ २\text{य}} = \frac{\text{ज्या } ४\text{य} \times \text{ज्या } ८\text{य}}{\text{कोज्या } ८\text{य} \times २\text{ज्या } २\text{अ} \times \text{ज्या } २\text{अ}},$$

कोज्या २अ, अनेनांशहरौ गुणितौ,

$$= \frac{\text{ज्या } ८\text{य} \times \text{कोज्या } २\text{य}}{\text{कोज्या } ८\text{य} \times \text{ज्या } २\text{य}} = \text{स्प } ८\text{य} \times \text{कोस्प } २\text{य} = \frac{\text{स्प } ८\text{य}}{\text{स्प } २\text{य}},$$

इति सिद्ध्यति।

(११) उदाहरणम्।

$$\frac{१ + \text{स्प}^२(४५^\circ - \text{अ})}{१ - \text{स्प}^२(४५^\circ - \text{अ})} = \text{कोछे } २\text{अ, इतिकथम्।}$$

$$\text{अत्र, } १ + \text{स्प}^२(४५^\circ - \text{अ}) = \text{छे}^२(४५^\circ - \text{अ}) = \frac{१}{\text{कोज्या}^२(४५^\circ - \text{अ})} = \text{अ}$$

एवमत्र ३० प्रक्रमस्थ (३) अस्य प्रथमस्वरूपानुसारतः, स्प२ (४५° − अ)

$$= \frac{२\text{स्प}(४५^\circ - \text{अ})}{१ - \text{स्प}^२(४५^\circ - \text{अ})},\ \text{अतः } \frac{१}{१ - \text{स्प}^२(४५^\circ - \text{अ})} = \frac{\text{स्प}२(४५^\circ - \text{अ})}{२\text{स्प}(४५^\circ - \text{अ})}$$

$$= \frac{\text{कोस्प } २\text{अ}}{२\text{स्प}(४५^\circ - \text{अ})} = \frac{\text{कोज्या } २\text{अ}}{\text{ज्या } २\text{अ} \times २\text{स्प}(४५^\circ - \text{अ})} = \text{क},$$

$$\therefore \text{अ} \times \text{क} = \frac{१ \times \text{कोज्या } २\text{अ}}{\text{कोज्या}^२(४५^\circ - \text{अ}) \times \text{ज्या } २\text{अ} \times २\text{स्प}(४५^\circ - \text{अ})}$$

$$= \frac{\text{कोज्या २ अ}}{\text{ज्या २अ} \times \text{२ज्या}(४५^\circ - \text{अ}) \times \text{कोज्या}(४५^\circ - \text{अ})}$$

$$= \frac{\text{कोज्या २अ}}{\text{ज्या २अ} \times \text{ज्या}(९०^\circ - \text{२अ})} = \frac{\text{कोज्या २अ}}{\text{ज्या २अ} \times \text{कोज्या २अ}}$$

= को छे २अ, इत्युपपन्नम् ।

अभ्यासार्थमुदाहरणानि (२)

(१) यदि ज्या अ $\frac{३}{५}$, कोज्या क = $\frac{९}{४१}$, तदा ज्या (अ—क) अस्य कोज्या (अ + क) अस्य च व्यक्तमानं किम् ।

(२) ज्या ४५° = $\frac{१}{\sqrt{२}}$, ज्या ३०° = $\frac{१}{२}$, तदा ७५° अंशानां ज्यां कोटिज्यां च प्रदर्शयत ।

(३) ज्या अ = $\frac{१५}{१७}$, कोटिज्या क = $\frac{१२}{१३}$, तदा (अ—क) अस्य ज्यां स्पर्शरेखां च वद ।

(४) ज्या १०५° + कोज्या १०५° = कोज्या ४५°, इति कथम् ।
(अत्र ज्या (९०° + १५°) = कोज्या १५° = कोज्या (४५° — ३०°), कोज्या (९०° + १५°) = —ज्या १५° = —ज्या (४५° — ३०°), अस्मादिष्टसिद्धिः)

(५) कोज्या (४५° — अ) × कोज्या (४५° — क) — ज्या (४५° — अ) × ज्या (४५° — क) = ज्या (अ + क) इति कथम् ।

(६) ज्या (४५° + अ) × कोज्या (४५° — क) + कोज्या (४५° + अ) × ज्या (४५° — क) = कोज्या (अ — क), इति कथम् ।

(७) $\frac{\text{ज्या (अ — क)}}{\text{कोज्या अ} \times \text{कोज्या क}} + \frac{\text{ज्या (क — ग)}}{\text{कोज्या क} \times \text{कोज्या ग}} + \frac{\text{ज्या (ग — अ)}}{\text{कोज्या ग} \times \text{कोज्या अ}}$ = ०, इति कथम् ।

(८) कोज्या (अ + क) × कोज्या य — कोज्या (क + य) × कोज्या अ = ज्याक × ज्या (य — अ), इति कथम् ।

(९) कोज्या ५७०° × ज्या ५१०° — ज्या ३३०° × कोज्या ३९०° = ०, इति कथम् ।

(१०) स्प २२५° × कोस्प ४०५° + स्प ७६५° × कोस्प ६७५° = ०, इति कथम्।

अकोणस्य निम्नलिखितमानेषु क्रमेण कल्पितेषु (ज्या अ + कोज्या अ), अस्य धनर्णत्वं निर्णीयताम् ।

(११) १४०°, (१२) २७८°, (१३) — ३५६°, (१४) — ११२५° ।

यदि अकोणस्याधोलिखितमानानि क्रमेण स्युस्तदा (ज्या अ — कोज्या अ), अस्य धनर्णत्वं निश्चीयताम् ।

(१५) २१५°, (१६) ८२५°, (१७) — ६३४°, (१८) — ४५७° ।

(१९) कोस्प (२७०° — अ) = स्प अ, इति कथम् ।

(२०) कोज्या अ + ज्या (२७०° + अ) — ज्या(२७०° — अ) + कोज्या (१८०° + अ) = ०, इति कथम् ।

(२१) कोस्प अ + स्प(१८०° + अ) + स्प(९०° + अ) + स्प(३६०° — अ) = ०, इति कथम् ।

(अत्र स्प (३६०° — अ) = स्प { १८०° + (१८०° — अ) = स्प (१८०° — अ) = — स्प अ, इति ज्ञेयम् ।)

(२२) यदि स्प ६०° = $\sqrt{३}$, स्प ४५° = १, तदा स्प १५° = २ — $\sqrt{३}$, इति प्रमाणीक्रियताम् ।

(अत्र २० प्रक्रमस्थं स्प (अ — क) अस्य स्वरूपमनुसन्धेयम् ।)

(२३) यदि स्प अ = $\frac{१}{२}$, स्प क = $\frac{१}{३}$, तदा स्प (२अ + क) = ३, इति कथम् ।

(अत्र २० प्रक्रमस्थं स्प (अ + क) अस्य स्वरूपं ततः ३० प्रक्रमस्थं स्प २अ अस्य स्वरूपमुपयोज्यम्)

निम्नलिखितस्वरूपेषु प्रत्येकं यथासंभवं योगरूपेणान्तररूपेण वा प्रदर्श्यताम् ।

(२४) २ ज्या ५ य × ज्या ७ य ।

(२५) २ कोज्या ७ य × ज्या ५ य ।

(२६) २ कोज्या ११ य × कोज्या ३ य ।

(२७) २ ज्या ५४° × ज्या ६६° ।

(२८) २ ज्या (४५° + अ) × ज्या (४५° − अ) = कोज्या २ अ, इति कथम् ।

(२६) कोज्या अ × ज्या (क − ख) + कोज्या क × ज्या (ख − अ) + कोज्या ख × ज्या (अ − क) = ०, इति कथम् ।

(अत्र २० प्रक्रमस्थं (छा) समीकरणमुपयोज्यम् । यथा, को ज्या अ × ज्या (क − ख) = ज्या $\frac{(अ + क − ख)}{२}$ − ज्या $\frac{(अ − क + ख)}{२}$, इत्यादि ।)

(३०) कोछे अ − २ कोस्प २ अ × कोज्या अ = २ ज्या अ, इति कथम् ।

(३१) $\frac{(कोज्या\ अ - कोज्या\ ३\ अ)\ (ज्या\ ८\ अ + ज्या\ २\ अ)}{(ज्या\ ५\ अ - ज्या\ अ)\ (कोज्या\ ४\ अ - कोज्या\ ६\ अ)}$ = १, इति कथम् ।

(३२) कोज्या (३६° − अ) × कोज्या (३६° + अ) + कोज्या (५४° + अ) × कोज्या (५४° − अ) = कोज्या २ अ, इति कथम् ।

(अत्र, ३६° − अ = प, ३६° + अ = फ, ५४° + अ = ब, ५४° − अ = भ, इति प्रकल्प्य २० प्रक्रमस्थं (जा) समीकरणमुपयोज्यम्, तत उत्थापनेनेष्टसिद्धिः ।)

(३३) उ. ज्या (अ + क) × उ. ज्या (अ − क) = (कोज्या अ − कोज्या क)^{२}, इति कथम् ।

(अत्र, उ. ज्या (अ + क) = १ − कोज्या (अ + क), उ. ज्या (अ − क) = १ − कोज्या (अ − क) तथा − ज्या^{२} अ × ज्या^{२} क = − (१ − कोज्या^{२} अ) (१ − को ज्या^{२} क), इति कल्पनेनेष्टसिद्धिः ।)

(३४) $\frac{\text{ज्या } २ \text{ अ} \times \text{ज्या अ} + \text{ज्या } ६ \text{ अ} \times \text{ज्या } ३ \text{ अ}}{\text{ज्या } ६ \text{ अ} \times \text{को ज्या } ३ \text{ अ} - \text{ज्या } २ \text{ अ} \times \text{कोज्या अ}}$ = स्प ५ अ, इति समर्थ्यताम् ।

(३५) २८ प्रक्रमोक्तार्धांशज्याकोटिज्यानयनप्रकारानुसारं $\frac{१}{\sqrt{२}}$ एतत्पञ्च-चत्वारिंशज्ज्यास्वरूपतः $२२\frac{१}{२}^{\circ}$ अंशानां ज्या कोटिज्ये प्रसाधयत ।

इति म० म० बापूदेवशास्त्रिकृतायां त्रिकोणमितौ द्वितीयोऽध्यायः ।

तृतीयोऽध्यायः

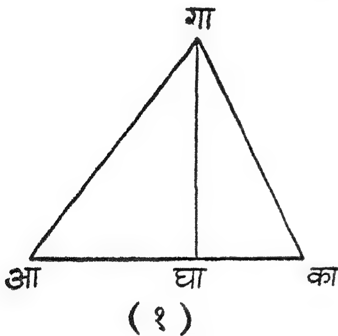
अत्र त्रिभुजचतुर्भुजयोर्वृत्तलग्नसमानजुंबहुभुजक्षेत्रस्य वृत्तस्य च कति च न गुणाः कथ्यन्ते ।

प्रक्र० ३४। त्रिभुजे त्रयो भुजास्तावन्त एव कोणाश्चेति षडवयवा भवन्तीत्युक्तं प्राक् ।

तत्र त्रयः कोगाः क्रमेण आ, का, गा, एभिर्द्योत्याः स्युः, तत्सम्मुखभुजाश्च क्रमेण अ, क, ग, एभिर्द्योत्याः स्युः ।

प्रक्र० ३५। प्रतित्रिभुजं तत्तद्भुजा तत्तत्सम्मुखकोणज्या समानगुणा भवति। कल्प्यत्तां तावत् (आ का गा) त्रिभुजस्य आ, का, गा, कोणाः तथा अ, क, ग, क्रमेण तत्सम्मुखभुजाः । गा कोणात् (आ का) भुजे गा कोण बिन्दोः (गा घा) लम्बः कार्यः । तदा

क्षेत्र दर्शनम्



(१)

गा
आ
का
घा
(२)

$$\text{ज्या आ} = \frac{\text{गा घा}}{\text{आ गा}} \text{ ।}$$

$$\text{ज्या का} = \text{ज्या गा का घा, (द्वि. क्षे.)} = \frac{\text{गा घा}}{\text{का गा}} \text{ ।}$$

$$\therefore \frac{\text{ज्या आ}}{\text{ज्या का}} = \frac{\text{कागा}}{\text{आगा}} = \frac{\text{अ}}{\text{क}} \text{ ।}$$

$$\therefore \text{ज्या आ : ज्या का} = \text{अ : क ।}$$

यद्वा अ : ज्या आ = क : ज्या का ।

सा* जात्यात् अ : ज्या आ = ग : ज्यागा

क : ज्याका = ग : ज्यागा ।

प्रक्र ३६—अनु० यतः अ : क = ज्या आ : ज्या का

अतः अ + क : अ — क = ज्या आ + ज्या का : ज्या आ — ज्या का

‡ = २ ज्या $\frac{1}{2}$ (आ + का) कोज्या $\frac{1}{2}$ (आ — का) :

२ कोज्या $\frac{1}{2}$ (आ + का) ज्या $\frac{1}{2}$ (आ — का),

$= \frac{\text{ज्या}\frac{1}{2}(\text{आ}+\text{का})}{\text{कोज्या}\frac{1}{2}(\text{आ}+\text{का})} : \frac{\text{ज्या}\frac{1}{2}(\text{आ}-\text{का})}{\text{कोज्या}\frac{1}{2}(\text{आ}-\text{का})}$

= स्प $\frac{1}{2}$ (आ + का) : स्प $\frac{1}{2}$ (आ — का) ।

यदि भुजयोर्योगेन तयोरन्तरं लभ्यते तदा तत्सम्मुख कोणयोरैक्यार्द्धस्य स्पर्शरेखया तयोरन्तरार्द्धस्य स्पर्शरेखा लभ्यते इत्यर्थः ।

---

* अत्र द्वितीयक्षेत्रे का कोणात् का घा लम्बनिपातनेन, ज्या आ $= \frac{\text{का घा}}{\text{आ का}}$,

एवं ज्या गा $= \frac{\text{का घा}}{\text{का गा}} \therefore \frac{\text{ज्या आ}}{\text{ज्या गा}} = \frac{\text{का घा}}{\text{आ का}} \times \frac{\text{का गा}}{\text{का घा}} = \frac{\text{का गा}}{\text{आ का}} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}}$,

∴ अ : ज्या आ : : ग : ज्या गा ।

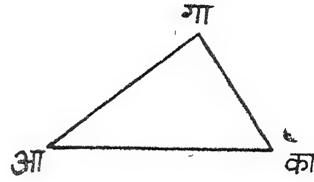
एवं प्रथमक्षेत्रे आ कोणात् आघा लम्बनिपातनेन, ज्या का $= \frac{\text{आ घा}}{\text{आ का}}$ ।

एवं ज्या गा $= \frac{\text{आ घा}}{\text{आ गा}}$, $\therefore \frac{\text{ज्या का}}{\text{ज्या गा}} = \frac{\text{आ गा}}{\text{आ का}} = \frac{\text{क}}{\text{ग}}$,

∴ क : ज्या का : : ग : ज्या गा । एवमेव $\frac{\text{अ}}{\text{ज्या आ}} = \frac{\text{क}}{\text{ज्या का}} = \frac{\text{ग}}{\text{ज्या गा}}$, इत्यपि ज्ञेयम् ।

‡ अत्रैतत्क्रमेण २२ प्रक्रमस्थ (पा), (फा), इत्यनुसारतोज्ञेयम् । ततोऽग्रेऽनुपातीय-पदद्वयमिदं २ कोज्या $\frac{1}{2}$ (आ + का) × कोज्या $\frac{1}{2}$ (आ — का) अनेन विभजनीयम् ।

प्रक्र. ३७—यदि (गा) समकोणःस्यात् तदा,



$$\text{ज्या आ} = \frac{\text{का गा}}{\text{आ का}} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}} ।$$

$$\text{कोज्या आ} = \frac{\text{आ गा}}{\text{आ का}} = \frac{\text{क}}{\text{ग}} ।$$

$$\text{स्प आ} = \frac{\text{का गा}}{\text{आ गा}} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}} ।$$

$$\text{ज्या आ} = \frac{\text{आ गा}}{\text{आ का}} = \frac{\text{क}}{\text{ग}} ।$$

$$\text{कोज्या का} = \frac{\text{का गा}}{\text{आ का}} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}} ।$$

$$\text{स्प का} = \frac{\text{आ गा}}{\text{का गा}} = \frac{\text{क}}{\text{अ}} ।$$

प्रक्र. ३८—त्रिभुजे भुजेभ्य इष्टकोणकोटिज्यानयनयुक्तिः प्रदश्यंते ।

(३५) प्रक्रमस्थक्षेत्रे द्रष्टव्ये ।

यदा का कोणो लघुः, तदा

$\text{आ गा}^2 = \text{आ का}^2 + \text{का गा}^2 - 2\text{आ का.का घा}$

यदा च का कोणोऽधिकाख्यस्तदा

$\text{आ गा}^2 = \text{आ का}^2 + \text{का गा}^2 + 2\text{आ का का घा}$

} एते उन्मिती क्रमेणक्षेत्रमितेर्द्वितीयाध्यायस्य त्रयोदशद्वादशप्रतिज्ञाभ्यां संपद्येते ।

परन्तु यदा का कोणो लघुः, तदा

$$\because \frac{\text{का घा}}{\text{का गा}} = \text{कोज्या का},$$

$$\therefore \text{का घा} = \text{का गा.कोज्या का} ।$$

यदा वा का कोणोऽधिकस्तदा

$$\because \frac{\text{का घा}}{\text{का गा}} = \text{कोज्या गा का घा} = -\text{कोज्या का},$$

$$\therefore \text{का घा} = -\text{का गा.कोज्या का},$$

$\therefore$ उत्थापनेन सिद्धं उभयत्रापि तुल्यमेव ।

$$\because \text{क}^2 = \text{ग}^2 + \text{अ}^2 - 2\text{अ ग.कोज्या का},$$

$$\therefore \text{कोज्या का} = \frac{\text{अ}^2 + \text{ग}^2 - \text{क}^2}{2\text{अ ग}} ।$$

*साजात्यात् कोज्या आ $=\frac{क^2+ग^2-अ^2}{२क ग}$।

कोज्या गा $=\frac{अ^2+क^2-ग^2}{२अ क}$।

प्रक्र. ३६—त्रिभुजे भुजेभ्योऽभीष्टकोणज्यानयनयुक्तिप्रकारः।

अत्र ज्या^{2}आ $=$ १—कोज्या^{2}आ $=$ (१+कोज्या आ)(१ − कोज्या आ)।

परन्तु १ + कोज्या आ $= १+\frac{क^2+ग^2-अ^2}{२क ग}=\frac{२कग+क^2+ग^2-अ^2}{२क ग}$,

$$=\frac{(क^2+२क ग+ग^2)-अ^2}{२क ग}=\frac{(क+ग)^2-अ^2}{२क ग}$$

$$=\frac{(क+ग+अ)\ (क+ग-अ)}{२क ग}।$$

तथा १ − कोज्या आ $= १-\frac{क^2+ग^2-अ^2}{२क ग}=\frac{२क ग-क^2-ग^2+अ^2}{२क ग}$

$$=\frac{अ^2-(क^2-२क ग+ग^2)}{२क ग}=\frac{अ^2-(क-ग)^2}{२क ग}$$

$$=\frac{(अ+क-ग)\ (अ-क+ग)}{२क ग}।$$

---

* अत्र कोज्या आ अस्य स्वरूपमुत्पाद्यते। ३५ प्रक्रमस्थप्रथमक्षेत्रं द्रष्टव्यम्। तत्र कल्प्यतां आ न्यूनकोणः, तदुत्पादक भुजयोरेकतरः आगा भुजः, तत्र तत्सम्मुख का कोणात् का घा लम्बः कृतोऽस्ति, $\therefore$ कोज्या आ $=\frac{आ घा}{आ का}$, $\therefore$ आ घा $=$ आ का $\times$ कोज्या आ, ततो रेखागणितद्वितीयाध्यायस्य त्रयोदशप्रतिज्ञया, आ न्यूनकोणसम्मुखभुजवर्गः $=$ का गा^{2} $=$ आ गा^{2} + आ का^{2} − २ आ गा $\times$ आ घा $=$ आ गा^{2} + आ का^{2} − २ आ गा $\times$ आ का $\times$ कोज्या आ, किंवा अ^2 $=$ क^2 + ग^2 − २ क ग $\times$ कोज्या आ,

$\therefore$ कोज्या आ $=\frac{क^2+ग^2-अ^2}{२क ग}$, एवं कोज्या आ स्वरूपमुत्पद्यते। तथैव गा न्यूनकोणं प्रकल्प्य कोटिज्या गा स्वरूपं साजात्यादुत्पादनीयम्।

पुनः यदि २ स = अ + क + ग कल्प्येत तदा

२ (स — अ) = अ + क + ग — २ अ = क + ग — अ ।

२ (स — क) = अ + क + ग — २क = अ + ग — क ।

२ (स — ग) = अ + क + ग — २ ग = अ + क — ग ।

$$\therefore \; *१ + \text{कोज्या आ} = \frac{२\,स \times २\,(स — अ)}{२\,क\,ग} = \frac{२\,स\,(स — अ)}{क\,ग} \text{।}$$

$$\text{तथा } १ — \text{कोज्या आ} = \frac{२\,(स — क) \times २\,(स — ग)}{२\,क\,ग} = \frac{२\,(स — क)\,(स — ग)}{क\,ग},$$

$$\text{अतएव ज्या}^२ \text{ आ} = \frac{४}{क^२\,ग^२}\,स\,(स — अ)\,(स — क)\,(स — ग) \text{।}$$

$$\therefore \; \text{ज्या आ} = \frac{२}{क\,ग}\sqrt{स\,(स — अ)\,(स — क)\,(स — ग)} \text{।}$$

अत्र मानस्य ऋणत्वं न सम्भवति त्रिभुजैककोणस्य समकोणद्वयाल्पत्वात् तज् ज्याया धनत्वात् ।

$$\text{साजात्यात् ज्या का} = \frac{२}{अ\,ग}\sqrt{स\,(स — अ)\,(स — क)\,(स — ग)} \text{।}$$

$$\text{ज्या गा} = \frac{२}{अ\,क}\sqrt{स\,(स — अ)\,(स — क)\,(स — ग)} \text{।}$$

प्रक्र० ४० । त्रिभुजे भुजानवगम्य इष्टकोणार्द्धज्याकोटिज्यास्पर्शरेखाणां मानं प्रदर्श्यंते ।

$$\text{यतः } २ \text{ ज्या}^२ \tfrac{१}{२} \text{ आ}† = १ — \text{कोज्या आ} = \frac{२\,(स — क)\,(स — ग)}{क\,ग},$$

---

* अत्र साजात्यात् पूर्ववत् ज्या² का = (१ + कोज्या का) (१ — कोज्या का) ।

$$\text{एवं } १ + \text{कोज्या का} = \frac{२\,स\,(स — क)}{अ\,ग}, \text{ तथा } १ — \text{कोज्या का} = \frac{२\,(स — अ)\,(स — ग)}{अ\,ग} \text{।}$$

ततोऽनयोर्वधमूलात् ज्या का मानमवगन्तव्यम् । तथैव ज्यागामानं ४० प्रक्रमस्थ ज्या ½ आ इत्यादीनां मानं च ज्ञेयम् ।

† २४ प्रक्रमस्थ (पा), (फा) इत्यनुसारतः ।

$\therefore$ ज्या $\frac{१}{२}$ आ $= \sqrt{\frac{(स-क)(स-ग)}{क\,ग}}$ ।

एवं $\because$ २ कोज्या^{२} $\frac{१}{२}$ आ $=$ १ $+$ कोज्या आ $= \frac{२\,स\,(स-अ)}{क\,ग}$

$\therefore$ कोज्या $\frac{१}{२}$ आ $= \sqrt{\frac{स\,(स-अ)}{क\,ग}}$ ।

अतएव स्प $\frac{१}{२}$ आ $= \frac{ज्या\,\frac{१}{२}\,आ}{कोज्या\,\frac{१}{२}\,आ} = \sqrt{\frac{(स-क)(स-ग)}{स\,(स-अ)}}$ ।

अत्राप्युन्मितीनां धनत्वमेव बोध्यम् ।

साजात्यात् ज्या $\frac{१}{२}$ का $= \sqrt{\frac{(स-अ)(स-ग)}{अ\,ग}}$ ।

ज्या $\frac{१}{२}$ गा $= \sqrt{\frac{(स-अ)(स-क)}{अ\,क}}$ ।

कोज्या $\frac{१}{२}$ का $= \sqrt{\frac{स\,(स-क)}{अ\,ग}}$ । कोज्या $\frac{१}{२}$ गा $= \sqrt{\frac{स\,(स-ग)}{अ\,क}}$ ।

स्प $\frac{१}{२}$ का $= \sqrt{\frac{(स-अ)(स-ग)}{स\,(स-क)}}$ । स्प $\frac{१}{२}$ गा $= \sqrt{\frac{(स-अ)(स-क)}{स\,(स-ग)}}$ ।

प्रक्र० ४१ । त्रिभुजे भुजेभ्यः क्षेत्रफलानयनयुक्तिप्रकार उच्यते। लम्ब-गुणं भूम्यर्द्धं खलु त्रिभुजे क्षेत्रफलं भवति ।

$\therefore$ आ का गा त्रिभुजफलम् $= \frac{१}{२}$ आ का $\times$ गा घा

$= \frac{१}{२}$ आ का $\times$ आ गा $\times \frac{गा\,घा}{आ\,गा}$

$= \frac{१}{२}$ आ का $\times$ आ गा $\times$ ज्या आ

$= \frac{क\,ग}{२} \cdot \frac{२}{क\,ग} \sqrt{स\,(स-अ)\,(स-क)\,(स-ग)}$

$= \sqrt{स\,(स-अ)\,(स-क)\,स-ग)}$ ।

अत एव

सर्वभुजैक्यं दलितं चतुःस्थितं बाहुभिः क्रमाद्रहितम् ।
तद्धातपद त्रिभुजे क्षेत्रे स्पष्टं फलं भवति ॥

इत्यार्यभटोक्तमुपपद्यते ।

प्रक्र० ४२। अनु० १, यतः

*त्रिभुजफलम् $= \frac{१}{२}$ आ का $\times$ आ गा $\times$ ज्या आ, इति पूर्वप्रक्रमे सिद्धम्, अतः त्रिभुजे भुजयोर्घातार्द्धं भुजान्तर्गतकोणज्यया गुणितं क्षेत्रफलं भवतीत्यवगम्यते।

प्रक्र० ४३। अनु० २, त्रिभुजे पूर्वोक्तप्रक्रमैर्लम्बाबाधावगमः सुगमः। तथा हि, यतः कोज्या आ $= \left(\frac{\text{आ घा}}{\text{क}}\right) = \frac{\text{क}^२ + \text{ग}^२ - \text{अ}^२}{२ \text{ क ग}}$,

$$\therefore \text{ आ घा} = \frac{\text{क}^२ + \text{ग}^२ - \text{अ}^२}{२ \text{ ग}} ।$$

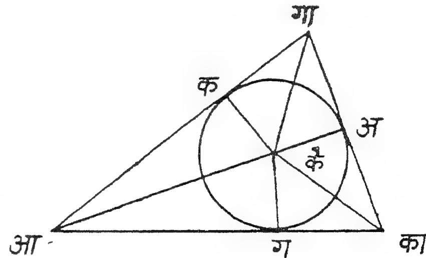
$$\because \text{ कोज्या का} = \left(\pm \frac{\text{का घा}}{\text{अ}}\right) = \frac{\text{अ}^२ + \text{ग}^२ - \text{क}^२}{२ \text{ अ ग}}$$

$$\therefore \text{ का घा} = \pm \frac{\text{अ}^२ + \text{ग}^२ - \text{क}^२}{२ \text{ ग}} ।$$

अत्र लम्बस्य अन्तर्बहिःपतनानुसारेण द्वितीयाबाधाया धनर्णत्वं बोध्यम्।

$$\begin{cases} \text{एवं } \because \text{ ज्या आ} \left(= \frac{\text{गा घा}}{\text{क}}\right) = \frac{२}{\text{क ग}} \sqrt{\text{स (स} - \text{अ) (स} - \text{क) (स} - \text{ग)}} । \\ \therefore \text{ गा घा} = \frac{२}{\text{ग}} \sqrt{\text{स (स} - \text{अ) (स} - \text{क) (स} - \text{ग)}} । \end{cases}$$

प्रक्र० ४४। त्रिभुजस्य भुजेभ्यः तदन्तर्बहिर्लग्नयोर्वृत्तयोर्व्यासार्द्धानयनं प्रदर्श्यते।



(१) तत्रादौ त्रिभुजान्तर्वृत्तव्यासार्द्धानयनम्।

यदि (आ का गा) त्रिभुजान्तर्वृत्तस्य केन्द्रं† (के) कल्प्येत

---

* तथैव साजात्यात् $\frac{१}{२}$ आ का $\times$ का गा $\times$ ज्या का $=$ फ,

एवं $\frac{१}{२}$ आ गा $\times$ का गा $\times$ ज्या गा $=$ फ, इति भवति।

† त्रिभुजे कोणद्वयार्धकारिरेखाद्वयसम्पातबिन्दु स्त्रिभुजान्तर्लग्नवृत्तकेन्द्रं, तथा तत्केन्द्रात् त्रिभुजस्य प्रतिभुजं कृतलम्बा उक्तवृत्तव्यासार्धानि भवन्तीति रेखागणितेनसिद्धयति। एवं तस्यैव विषमचतुर्भुजस्यान्तर्लग्नवृत्तं कर्तुं शक्यं यस्यैककर्णसंलग्नभुजद्वयं परस्परं समानं भवति।

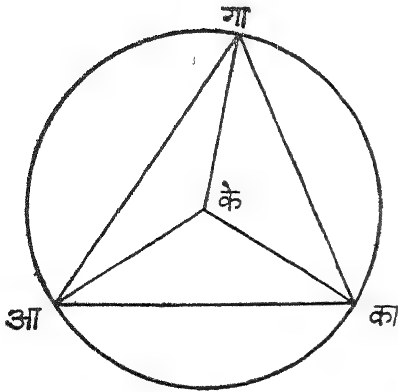
तदा के अ = के क = के ग

$= \text{व्यासार्द्ध} = (\text{व})$।

अथ ∵ फ = △ आ के का + △का के गा + △आ के गा

$= \frac{1}{2}\text{ग.व} + \frac{1}{2}\text{अ व} + \frac{1}{2}\text{क.व} = \frac{\text{अ} + \text{क} + \text{ग}}{2}\text{व} = \text{स व},$

$\therefore \text{व} = \frac{\text{फ}}{\text{स}} = \frac{\sqrt{\text{स}(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})}}{\text{स}}$ ।



(२) त्रिभुज बहिर्लग्न वृत्तव्यासार्द्धानयनम् ।

यदि (आ का गा) त्रिभुजबहिर्लग्नवृत्तस्य केन्द्रं* (के) कल्प्येत तदा

के आ = के का = के गा = व्यासार्द्ध = (वा) ।

अथ समानभूमौ वर्तमानयोः केन्द्रपरिधिलग्नयोः कोणयोराद्योऽपराद् द्विगुणो भवति ।

अतः (४२ प्रक्रमतः) †फ = $\frac{1}{2}$ अ क-ज्या $\frac{1}{2}$ आ के का एवं सिद्धयति ।

परन्तु ज्या $\frac{1}{2}$ आ के का = ‡ $\frac{\frac{1}{2}\text{आ का}}{\text{आ के}} = \frac{\text{ग}}{2\text{वा}}$ ।

---

* अत्रत्यत्रिभुजभुजद्वयमर्धितं कृत्वा तत्तदर्धचिह्नतः कृतलम्बयोस्सम्पातविन्दुस्त्रिभुजबहिर्लग्नवृत्तकेन्द्रं भवतीति रेखागणितेन ज्ञायते ।

† अनेन—

"भुजमध्यगता जीवा क्षुण्णा दोष्णोर्वधेन सा ।
दलिता त्रिभुजस्य स्यात्फलं वान्यप्रकारतः ॥"

इति विशेषोक्तमुपपद्यते ।

‡ अत्र (के) केन्द्रात् आ का (ग) भुजोपरि के घ लम्बकरणेन ∠ आ के घ = ∠$\frac{1}{2}$ आ के का, ततः, ∵ आ के : १ :: $\frac{1}{2}$ आ का : ∠$\frac{1}{2}$ आ के का,

∴ ∠$\frac{1}{2}$ आ के का = $\frac{\frac{1}{2}\text{आ का}}{\text{आ के}}$, इति ज्ञेयम् ।

$$फ = \frac{अ.क.ग}{४ वा}, \therefore वा = \frac{अ.क.ग}{४ फ} = \frac{अ. क. ग}{४ \sqrt{स (स - अ)(स - क)(स - ग)}} ।$$

अस्मादिदमवगम्यते, त्रिभुजे कोणस्य ज्या तत्कोणसम्मुखभुजात् त्रिभुजबहिर्लग्नवृत्तव्यासाप्तेन तुल्या भवतीति ।

प्रक्र० ४५ । अनुमा० १, यदि (आ का गा) त्रिभुजे (गा) कोणात् (आ का) भूमौ लम्बः (ल) क्रियेत तदा

$फ = \frac{१}{२} ग ल$ । अथ च पूर्व प्रक्रमतः सिद्धम् $फ = \frac{अ क ग}{४ वा}$ ।

$$\therefore \frac{१}{२} ग ल = \frac{अ क ग}{४ वा} \therefore वा = \frac{अ क}{२ ल} ।$$

अतएव सिद्धान्त विषयकक्रोडग्रन्थे मयोक्तम्—

त्रिबाहुकबहिर्लग्नवृत्तव्यासदलं किल ॥
भुजयोराहते : खण्डाल्लम्बाप्तेन समं भवेत् । इति ॥

प्रक्र० ४६ । अनु० २, यतः $फ = \frac{अ + क + ग}{२} व = \frac{अ क ग}{४ वा}$,

$$\therefore २ वा व = \frac{अ क ग}{अ + क + ग} ।$$

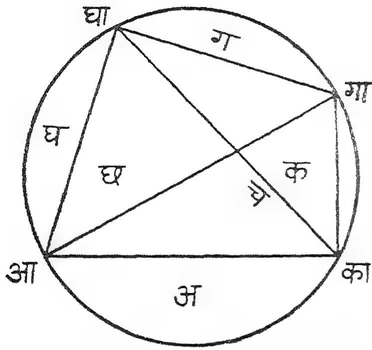
अस्मादिदमवगम्यते । त्रिभुजे त्रयाणां भुजानां वधात् तद्योगेनाप्तं त्रिभुजान्तर्बहिलग्न वृत्तव्यासार्द्धयोर्वधेन द्विगुणेन तुल्यं भवतीति ।

प्रक्र० ४७ । वृत्तान्तर्गतचतुर्भुजस्य भुजेभ्यस्तत्कोणकर्णफलादीनामानयनं प्रदर्श्यते ।

अत्र किल

आ का = अ । का गा = क । गा घा = ग । घा आ = घ । का घा = च । आ गा = छ ।

(१) तदा (३८ प्रक्रमतः)



$$\text{कोज्या आ} = \frac{\text{अ}^2 + \text{घ}^2 - \text{च}^2}{\text{२ अ घ}}$$

$$\text{कोज्या गा} = \frac{\text{क}^2 + \text{ग}^2 - \text{च}^2}{\text{२ क ग}},$$

$$\therefore\ \text{च}^2 = \text{अ}^2 + \text{घ}^2 - \text{२ अ घ. कोज्या आ}$$

$$= \text{क}^2 + \text{ग}^2 - \text{क ग. कोज्या गा ।}$$

परन्तु क्षेत्रमितेस्तृतीयाध्यायस्य एकविंशप्रतिज्ञया—

$$\text{कोज्या आ} = \text{कोज्या } (\text{१८०}^\circ - \text{गा}) = -\text{कोज्या गा}$$

$$\therefore\ \text{अ}^2 + \text{घ}^2 - \text{२अ घ.कोज्या आ} = \text{क}^2 + \text{ग}^2 + \text{२क ग.कोज्या आ}$$

$$\therefore\ \text{कोज्या आ} = \frac{\text{अ}^2 + \text{घ}^2 - \text{क}^2 - \text{ग}^2}{\text{२(अ घ} + \text{क ग)}} = -\text{कोज्या गा ।}$$

$$\text{साजात्यात् कोज्या ा} = \frac{\text{अ}^2 + \text{क}^2 - \text{ग}^2 - \text{घ}^2}{\text{२(अ क} + \text{ग घ)}} = -\text{कोज्या घा ।}$$

(२) अतः (३६) प्रक्रमोक्तयुक्त्या सिद्धम्

$$\text{ज्या आ} = \frac{\text{२}}{\text{अ घ} + \text{क ग}} \sqrt{(\text{स} - \text{अ})(\text{स} - \text{क})(\text{स} - \text{ग})(\text{स} - \text{घ})}\ \text{।}$$

$$\text{अत्र स} = \frac{\text{अ} + \text{क} + \text{ग} + \text{घ}}{\text{२}}\ \text{इति बोध्यम् ।}$$

(३) एवमेव (४०) प्रक्रमोक्त युक्त्या

$$\text{ज्या } \tfrac{1}{2}\text{ आ} = \sqrt{\frac{(\text{स} - \text{अ})\ (\text{स} - \text{घ})}{\text{अ घ} + \text{क ग}}} = \text{कोज्या } \tfrac{1}{2}\text{ गा}^{*}$$

---

* अत्र, वृत्तान्तर्गतचतुर्भुजे सम्मुखकोणयोगस्य समकोणद्वयतुल्यत्वात्

$\text{ज्या आ} = \text{ज्या } (\text{१८०}^\circ - \text{गा}),\ \therefore\ \text{ज्या } \tfrac{1}{2}\text{ आ} = \text{ज्या } (\text{९०}^\circ - \tfrac{1}{2}\text{गा})$

$= \text{कोज्या } \tfrac{1}{2}\text{ गा}$ । एवमग्रेऽपि बोध्यम् ।

$$\text{कोज्या } \tfrac{1}{2} \text{ आ} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{क})\ (\text{स}-\text{ग})}{\text{अ घ}+\text{क ग}}} = \text{ज्या } \tfrac{1}{2} \text{ गा}$$

$$\text{स्प } \tfrac{1}{2} \text{ आ} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{अ})\ (\text{स}-\text{घ})}{(\text{स}-\text{क})\ \text{स}-\text{ग})}} = \text{को स्प } \tfrac{1}{2} \text{ गा}$$

(४) अथ† $\because \dfrac{\text{अ}^2+\text{घ}^2-\text{च}^2}{2\text{ अ घ}} = -\dfrac{\text{क}^2+\text{ग}^2-\text{च}^2}{2\text{ क ग}}$

$$\therefore\ \text{च}^2 = \frac{(\text{अ ग}+\text{क घ})\ (\text{अ क}+\text{ग घ})}{\text{अ घ}+\text{क ग}}$$

साजात्यात् $\text{छ}^2 = \dfrac{(\text{अ ग}+\text{क घ})\ (\text{अ घ}+\text{क ग})}{\text{अ क}+\text{ग घ}}$ ।

एतेन

'कर्णाश्रित भुजघातैक्यमुभयथान्योन्यभाजितं गुणयेत् ।
योगेन भुजप्रतिभुजवधयोः कर्णौ पदे विषमे ॥''

इति ब्रह्मगुप्तोक्तं वृत्तान्तर्गतविषमचतुर्भुजपरमस्तीत्यवगम्यते ।

(५) अतएव $\text{च छ} = \text{अ ग}+\text{क घ}$ तथा $\dfrac{\text{च}}{\text{छ}} = \dfrac{\text{अ क}+\text{ग घ}}{\text{अ घ}+\text{क ग}}$

अतएव मत्कृत क्रोडग्रन्थे

वृत्तान्तःस्थ चतुर्बाहुक्षेत्रे श्रवणयोर्हतिः ।
भुजप्रतिभुजाहत्योः समासेन समा भवेत् ॥ इत्युक्तम् ।

---

† अत्र पक्षान्तरनयनेन, $\dfrac{\text{च}^2(\text{अ घ}+\text{क ग})}{\text{अ घ}\times\text{क ग}} = \dfrac{\text{अ}^2\text{कग}+\text{घ}^2\text{कग}+\text{क}^2\text{अघ}+\text{ग}^2\text{अघ}}{\text{अ घ}\times\text{क ग}}$

ततः चवर्गस्य गुणकेन पक्षद्वये विभक्ते, $\text{च}^2 = \dfrac{(\text{अ ग}+\text{क घ})(\text{अ क}+\text{ग घ})}{\text{अ घ}+\text{क ग}}$, इति सिध्यति ।

एवमन्यकर्णवर्गोऽपि सिध्यति, यथा,

$\because$ कोज्या का $= -$ कोज्या घा, $\therefore \dfrac{\text{अ}^2+\text{क}^2-\text{छ}^2}{2\text{अ क}} = -\dfrac{\text{ग}^2+\text{घ}^2-\text{छ}^2}{2\text{ग घ}}$,

छेदगमेन, $2\text{ ग घ }(\text{अ}^2+\text{क}^2) - 2\text{ग घ}\times\text{छ}^2 = -2\text{अ क }(\text{ग}^2+\text{घ}^2) + 2\text{अ क}\times\text{छ}^2$,
पक्षान्तरनयनेन, $2\text{छ}^2(\text{अ क}+\text{ग घ}) = 2\text{अ क ग}^2 + 2\text{अ क घ}^2 + 2\text{अ}^2\text{ग घ} + 2\text{क}^2\text{ग घ}$,

$\therefore\ \text{छ}^2 = \dfrac{(\text{अ ग}+\text{क घ})\ (\text{अ घ}+\text{क ग})}{\text{अ क}+\text{ग घ}}$, इति सिध्यति ।

(६) (आ का गा घा) चतुर्भुजफलम् $= \triangle$ आ का घा $+ \triangle$ का गा घा

$= \frac{1}{2}$ अ घ. ज्या आ $+ \frac{1}{2}$ क ग.ज्या आ $= \frac{1}{2}$ (अ घ $+$ क ग) ज्या आ

$= \sqrt{(स-अ)(स-क)(स-ग)(स-घ)}$ एतेन

भुज समासदलं हि चतुःस्थितं निजभुजैः क्रमशः पृथगूनितम् ।
अथ परस्परमेव समाहतं कृतिपदं त्रिचतुर्भुजयोः फलम् ।।

इति श्रीपत्युक्तं वृत्तान्तर्गतचतुर्भुजपरमित्यवगम्यते ।

(७) यदि (आ का घा) त्रिभुजलग्नवृत्तस्य व्यासार्द्ध (वा) कल्प्येत

तदा (४४ प्रक्रमतः) $वा = \frac{अ\ घ\ च}{४ \triangle आ\ का\ घा}$ ।

परन्तु $\triangle$ आ का घा $= \frac{1}{2}$ अ घ. ज्या आ,

$\therefore वा = \frac{अ\ घ\ च}{२\ अ\ घ.\ ज्या\ आ} = \frac{च}{२\ ज्या\ आ} = \frac{च}{२\ ज्या\ गा}$ ।

एवमेव $वा = \frac{छ}{२\ ज्या\ का} = \frac{छ}{२\ ज्या\ घा}$ ।

अथ $\because$ $ज्या\ आ = \frac{२}{अ\ घ + क\ ग} \sqrt{(स-अ)(स-क)(स-ग)(स-घ)}$

$\therefore वा = \frac{च}{२\ ज्या\ आ} = \frac{च\ (अ\ घ + क\ ग)}{४\sqrt{(स-अ)(स-क)(स-ग)(स-घ)}}$

$= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(अ\ क + ग घ)(अ ग + क\ घ)(अ\ घ + क\ ग)}{(स-अ)(स-क)(स-ग)(स-घ)}}$ ।

अत इदमवगम्यते । विषम चतुर्भुजमात्रं वृत्तान्तः कर्तुं शक्यते* । अथ च

---

* विषमचतुर्भुजसर्वकोणयोगस्य वृत्तकेन्द्रलग्नसर्वकोणयोगस्य च समकोण चतुष्टय-तुल्यत्वेन विषमचतुर्भुजमात्रं वृत्तान्तः कर्तुं शक्यते । एवमत्र वृत्तान्तर्लग्नचतुर्भुजस्य भुजा वृत्त-परिधिचापपूर्णज्यारूपा यतो भवन्ति, अतस्तत्समस्तभुजचापानां योगस्य वृत्तपरिधिसमत्वेन भुजव्यत्यासेऽपि तस्य वृत्तान्तर्लग्नत्वात्तत्क्षेत्रफले विकारो न भवतीति यदुक्तं तद्युक्तमेव ।

किन्तु भुजानां क्रमविपर्यासे कर्णयोर्भिन्यात्तत्सम्मुखकोणेषु विकारो ज्ञेयः । अथ

भुजानां क्रमव्यत्यासेऽपि न भवति क्षेत्रफले विकारः किन्तु कोणादिष्वेव, अथ यदि अत्र घ = ० कल्प्येत तदा कोणादीनां मानानि पूर्वसाधितैः त्रिभुजकोणादीनां मानैरभिन्नानि सपद्यन्ते ।

प्रक्र० ४८ । विषमचतुर्भुजमात्रस्यान्योऽन्यसम्मुखकोणद्वयविशिष्टेभ्यो भुजेभ्यः फलानयनं प्रदर्श्यते ।

पूर्वप्रक्रमस्थं क्षेत्रं द्रष्टव्यम् ।

तत्र क्षत्रफलद्योतकं यदि (फ) कल्प्येत तदा

$$फ = \frac{1}{2} (अ\,घ.\ ज्या\ आ + क\,ग.\ ज्या\ का)$$

$$परन्तु\ कोज्या\ आ = \frac{अ^2 + घ^2 - च^2}{2\,अ\,घ},$$

$$अथ\ च\ कोज्या\ गा = \frac{क^2 + ग^2 - च^2}{2\,क\,ग}$$

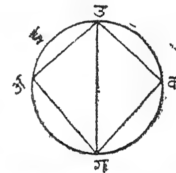
$$\therefore\ 1 + कोज्या\ आ = \frac{(अ+घ)^2 - च^2}{2\,अ\,घ} \qquad (1)$$

$$1 - कोज्या\ आ = \frac{च^2 - (अ-घ)^2}{2\,अ\,घ} \qquad (2)$$

$$1 + कोज्या\ गा = \frac{(क+ग)^2 - च^2}{2\,क\,ग} \qquad (3)$$

$$1 - कोज्या\ गा = \frac{च^2 - (क-ग)^2}{2\,क\,ग} \qquad (4)$$

यस्य विषमचतुर्भुजक्षेत्रस्य सम्मुखकोणयोर्योगः 180° अंशमितो भवति तस्य वृत्तान्तः करणे युक्तिः प्रदर्श्यते :—



यथा कल्प्यताम्, अ उ क ग किमपि विषमचतुर्भुजं वर्तते । यस्य सम्मुखकोणद्वययोगः 180° अंश मितोऽस्ति । उक्त चतुर्भुजं वृत्तान्तः कर्तुमभीष्टं चेत्, उ ग रेखां कृत्वा उ क ग त्रिभुजोपरि अ इ उ क ग वृत्तं कार्यम् । यतो हि उ क ग चापान्तर्गतः उ क ग कोणः, उ इ ग चापान्तर्गतश्च उ अ ग कोणः, अनयोर्योगः 180° अंशमितः प्रतिज्ञानुसारं स्वीकृतः, अतः अ बिन्दुः उक्तपरिधिनिष्ठोऽवश्यं भवेत्, येनोक्तचतुर्भुजं वृत्तान्तर्गतं सम्पद्यते ।

अथ (१), (४) अनयोर्योगतः सिद्धौ पक्षौ

$$(\text{अ}+\text{ध})^{\text{२}}-(\text{क}-\text{ग})^{\text{२}}=\text{२ अ घ}\,(\text{१}+\text{कोज्या आ})+\text{२ क ग}\,(\text{१}-\text{कोज्या गा})$$

$$\text{यद्वा }(\text{स}-\text{क})\,(\text{स}-\text{ग})=\text{अ घ.}\,\frac{\text{१}+\text{कोज्या आ}}{\text{२}}+\text{क ग.}\frac{\text{१}-\text{कोज्या गा}}{\text{२}}$$

$$=\text{*अ घ. कोज्या}^{\text{२}}\,\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{आ}+\text{क ग. ज्या}^{\text{२}}\,\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{गा} \qquad (\text{५})$$

एवमेव (२), (३) अनयोर्योगतः सिद्धौ पक्षौ

$$(\text{स}-\text{अ})\,(\text{स}-\text{घ})=\text{अ घ. ज्या}^{\text{२}}\,\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{आ}+\text{क ग. कोज्या}^{\text{२}}\,\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{गा} \qquad (\text{६})$$

अथ (५), (६) अनयोर्गुणनात्सिद्धम्

$$(\text{स}-\text{अ})\,(\text{स}-\text{क})\,(\text{स}-\text{ग})\,(\text{स}-\text{घ})$$

$$=\dagger\text{अ}^{\text{२}}\,\text{घ}^{\text{२}}.\,\text{ज्या}^{\text{२}}\,\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{आ. कोज्या}^{\text{२}}\,\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{आ}$$

$$+\text{अ क ग घ. कोज्या}^{\text{२}}\,\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{आ. कोज्या}^{\text{२}}\,\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{गा}$$

$$+\text{क}^{\text{२}}.\text{ग}^{\text{२}}.\,\text{ज्या}^{\text{२}}\,\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{गा. कोज्या}^{\text{२}}\,\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{गा}$$

$$+\text{अ क ग घ. ज्या}^{\text{२}}\,\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{आ. ज्या}^{\text{२}}\,\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{गा}$$

$$=(\text{अ घ. ज्या}\,\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{आ. कोज्या}\,\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{आ}+\text{क ग. ज्या}\,\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{गा. कोज्या}\,\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{गा})^{\text{२}}$$

$$+\text{अ क ग घ}\,(\text{कोज्या}\,\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{आ. कोज्या}\,\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{गा}-\text{ज्या}\,\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{आ. ज्या}\,\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{गा})^{\text{२}}$$

$$=\ddagger\tfrac{\text{१}}{\text{४}}\,(\text{अ घ. ज्या आ}+\text{क ग. ज्या गा})^{\text{२}}$$

$$+\text{अ क ग घ. को ज्या}^{\text{२}}\,\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,(\text{आ}+\text{गा})$$

---

* अत्र $\frac{\text{१}+\text{कोज्या आ}}{\text{२}}=\text{कोज्या}^{\text{२}}\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{आ}$ तथा $\frac{\text{१}-\text{कोज्या गा}}{\text{२}}=\text{ज्या}^{\text{२}}\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{गा}$,

एतदर्थं २४ प्रक्रमो द्रष्टव्यः।

† अत्र प्रथमवर्गपूर्त्यर्थं $\text{२ अ क ग घ.ज्या}\,\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{आ.कोज्या}\,\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{आ.ज्या}\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{गा.कोज्या}\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{गा}$, पदमिदं संयोज्यं द्वितीयवर्गपूर्त्यर्थं वियोज्यं च।

‡ २ज्या आ.कोज्या आ = ज्या २आ, अत्र २आ अस्मिन् (आ) अनेनोत्थापिते

$\text{२ ज्या}\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\text{आ.कोज्या}\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\text{आ}=\text{ज्या आ},\ \therefore\ \frac{\text{अ घ.ज्या आ}}{\text{२}}=\text{अ घ.ज्या}\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\text{आ.कोज्या}\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\text{आ}$,

तथा $\frac{\text{क ग.ज्या गा}}{\text{२}}=\text{क ग. ज्या}\,\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{गा. कोज्या}\,\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{गा}$. इति ज्ञेयम्।

$= फ^2 + अ\ क\ ग\ घ.\ कोज्या^2\ \frac{1}{2}\ (आ + गा)$

$\therefore\ फ = \sqrt{(स - अ)\ (स - क)\ (स - ग)\ (स - घ) - अ\ क\ ग\ घ.\ कोज्या^2 \times \frac{1}{2}\ (आ + गा)}$ ।

अथ यतः $आ + का + गा + घा = ३६०^\circ$,

$\therefore\ \frac{1}{2}\ (आ + गा) = १८०^\circ - \frac{1}{2}\ (का + घा)$

अथ च $\therefore$ $कोज्या^2\ \frac{1}{2}\ (आ + गा) = कोज्या^2\ \frac{1}{2}\ (का + घा)$ ।

अत इदं फलं सम्मुखकोणद्वययोरन्यतरेण विशिष्टेभ्यश्चतुर्भ्यो भुजेभ्यः सम्पन्नम् ।

अथ यदि $आ + गा = का + घा = १८०^\circ$,

तदा $कोज्या^2\ \frac{1}{2}\ (आ + गा) = कोज्या^2\ \frac{1}{2}\ (का + घा) = ०$ ।

अतोऽत्र $फ = \sqrt{(स - अ)\ (स - क)\ (स - ग)\ (स - घ)}$

पूर्वं साधितेन वृत्तान्तर्गतचतुर्भुजमानेनाभिन्नं जातम् ।*

---

* किञ्च यस्य चतुर्भुजस्य सम्मुखकोणद्वययोगः समकोणद्वयतुल्यः, यदन्तर्गतो वृत्तपरिधिश्च प्रतिभुजं तथा स्पृशेद्यथा परिधिच्छिन्नसर्वभुजखण्डानि परस्परं समानानि भवन्ति, तादृशस्य चतुर्भुजस्य वृत्ताबहिर्लग्नत्वेऽपि तत्फलं वृत्तान्तर्गत चतुर्भुजेनाऽभिन्नमेव भवति । यथा कल्प्यताम्, आ का गा घा चतुर्भुजमस्ति, यस्य आ का भुजः = अ, का गा = क, गा घा = ग, आ घा = घ, वृत्तपरिधिश्च प्रतिभुजं क्रमशः प, फ, ब, भ बिन्दुषु तथा स्पृशति, येन आ प, आ भ, इत्यादि सर्वभुजखण्डानि परस्परं समानानि भवन्ति, फलतः सर्वे भुजा अपि समानाः सन्ति । अथ $स = \frac{अ + क + ग + घ}{२}$, तथा $स = अ + ग = क + घ$,

$\therefore\ अ = स - ग,\ \ ग = स - अ,\ \ क = स - घ,\ \ घ = स - क$ । एवं सति ४८ प्रक्रमेण,

$फ^2 = अ.क.ग.घ - अ.क.ग.घ \times कोज्या^2\ \frac{1}{2}\ (आ + गा)$, अत्र $आ + गा = २अ = १८०^\circ$ इति कल्पितम्, अतः

$फ^2 = अ.\ क.\ ग.\ घ - अ.\ क.\ ग.\ घ \times कोज्या^2\ अ$,

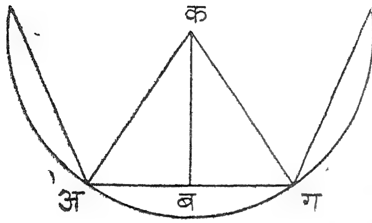
$= अ.\ क.\ ग.\ घ - अ.\ क.\ ग.\ घ\ (१ - ज्या^2\ अ)$

$= अ.\ क.\ ग.\ घ \times ज्या^2\ अ$, $\therefore\ फ = \sqrt{अ.\ क.\ ग.\ घ \times १}$,

$\because\ अ = ९०^\circ$, $\therefore$ ज्या अ = १, इति पूर्वोक्तमुपपद्यते । एतेनेदमवगम्यते, पूर्वोक्त लक्षणलक्षितस्य केवलं वृत्तबहिर्लग्नवर्गक्षेत्रस्यैव फलं वृत्तान्तर्गतचतुर्भुजक्षेत्रफलेन तुल्यं भवतीति ।

अतएव विषमचतुर्भुजस्यानेकविधेषु फलेषु वृत्तान्तर्गतस्य तस्य फलं महत्तम भवति । इदमेव पूर्वाचार्यैः स्वग्रन्थेषु साधितम् ।

प्रक्र० ४६ । वृत्तान्तर्गतस्य समानर्जुबहुभुजक्षेत्रस्य परिधिफलयोरानयन-युक्तिप्रकारः ।



अत्र किल (क) वृत्तकेन्द्रं स्यात् तदन्तर्गतस्य समानर्जु (न) संख्याकभुज-क्षेत्रस्य भुजः अ ग स्यात्, (व) वृत्तस्य व्यासार्द्धं स्यात् । अथ क अ, क ग रेखे सयोज्य अ ग रेखोपरि क ब लम्बः कार्यः ।

तथा च $\angle$अ क ग $=\frac{३६०^\circ}{न}$, बहुभुजक्षेत्रपरिधिश्च = न. अ ग,

$= २$ न. अ ब = २ न. अ क. ज्या अ क ब = २ न. ब. ज्या $\frac{१८०^\circ}{न}$

अपि च बहुभुजक्षेत्रफलम् = न. अ क ग क्षेत्रम् = न. $\frac{अ ग. क ब}{२}$

= *न × अ क. ज्या अ क ब × अ क. कोज्या अ क ब

= न व^{२}. ज्या $\frac{१८०^\circ}{न}$ को ज्या $\frac{१८०^\circ}{न}$ ।

अस्मादिदमवगम्यते, येषां समानर्जु बहुभुजक्षेत्राणां भुजसंख्या समाना भवेत् तेषु तत्तत्क्षेत्रपरिधिस्तत्तत्क्षेत्रबहिर्लग्नवृत्तव्यासार्द्धात्समानगुणो भवति । तत्तत्क्षेत्रफलं च तत्तक्षेत्रबहिर्लग्नवृत्तव्यसार्द्धवर्गात्समानगुणं भवतीति ।

---

* अत्र १ : अ क : : ज्या $\angle$अ क ब : अ ब, ∴ अ ब = अ क × ज्या $\angle$अ क ब,

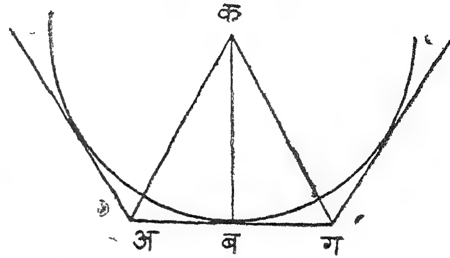
एवं, १ : अ क : : कोज्या $\angle$अ क ब : क ब,

∴ क ब = अ क × कोज्या $\angle$अ क ब ।

∴ अ ब × क ब = अ क^{२} × ज्या $\angle$अ क ब × कोज्या $\angle$अ क ब । अतोऽग्रेस्फुटम् ।

प्रक्र० ५० । वृत्तबहिर्लग्नस्य ऋजुसमबहुभुजक्षेत्रस्य परिधिफलयोरानयन-युक्तिप्रकारः ।

अत्र किल अ ग वृत्त बहिर्लग्न (न) संख्याकर्जु भुजक्षेत्रस्य भुजः ब स्थाने परिधौ लग्नः तथा च बहिर्लग्न बहुभुजक्षेत्रपरिधिः = न × अ ग
= न. अ ब



= २ न. क ब. स्प ∠ अ क ब† = २ न व. स्प $\frac{१८०°}{न}$ ।

अपि च क्षेत्रफलम् = न. अ क ग क्षेत्रफलम् = न × $\frac{अ ग. क ब}{२}$

= न. क ब स्प अ क ब × क ब = न. व^{२}. स्प $\frac{१८०°}{न}$ ।

---

† अत्र ज्या ∠ अ क ब = ज्या $\frac{१८०°}{न}$ । ततः ज्या ∠ अ क ब : अ ब
= कोज्या ∠ अ क ब : क ब,

∴ अ ब = क ब × $\frac{ज्या ∠ अ क ब}{कोज्या ∠ अ क ब}$ = क ब × स्प ∠ अ क ब,

एवं क ब = अ ब × कोस्प ∠ अ क ब ।

अतः बहुभुजक्षेत्रपरिधिः = २ न. अ ब = २ न. क ब. स्प ∠ अ क ब ।

एवमुक्तक्षेत्रफलम् = न. अ ब. क ब = न. क ब^{२}. स्प ∠ अ क ब, अत्र अ ब अस्योत्थापनेन ।

अथवा क ब अस्मिन्नुत्थापिते = न. अ ब^{२}. कोस्प ∠ अ क ब इत्यपि भवति ।

अथात्र समानर्जु बहुभुजक्षेत्रफलम् = न × उपरि निर्दिष्टक्षेत्रस्थ अ क ग त्रिभुज फलम्, तथात्र तस्य बहिरन्तश्च लग्नयोर्वृत्तयोर्व्यासार्द्धे क्रमेण व, व′ इति कल्प्येते । अतः केवलं अ ब भुजार्द्धतस्तत्फलम् = न × अ ब^{२} × कोस्प ∠ अ क ब (१) अन्तर्लग्नवृत्तव्यासार्धतस्तत्फलम् = न × ब^{२} × ज्या ∠ अ क ब × कोज्या ∠ अ क ब (२) बहिर्लग्न वृत्तव्यासार्धतस्तत्फलम् = न × व′^{२} × स्प ∠ अ क ब (३) एवं त्रिविधस्वरूपं समानर्जु बहुभुजक्षेत्रफलं भवतीति ज्ञेयम् ।

अस्मादिदमवगम्यते, येषां समानर्जु बहुभुजक्षेत्राणां भुजसंख्या समाना भवेत् तेषु तत्तत्क्षेत्रपरिधिस्तत्तत्क्षेत्रान्तर्लग्नवृत्तव्यासार्द्धात्समानगुणो भवति। तत्तत्क्षेत्रफलञ्च तत्तदन्तर्लग्नवृत्तव्यासार्द्धवर्गात्तुल्यगुणं भवतीति ।‡

प्रक्र० ५१ (व) व्यासार्द्धविशिष्टस्य वृत्तस्यान्तर्बहिश्च लग्नयोः समानर्जु (न) संख्याकभुजक्षेत्रयोः क्रमेण परिधी किल (प) (पा) स्याताम्, फले च (फ) (फा) स्याताम्

$$\text{तदा } \frac{\text{प}}{\text{पा}} = \frac{२ \text{ न व. ज्या } \frac{१८०^\circ}{\text{न}}}{२ \text{ न व. स्प } \frac{१८०^\circ}{\text{न}}} = \text{कोज्या} \frac{१८०^\circ}{\text{न}} ।$$

$$\text{तथा } \frac{\text{फ}}{\text{फा}} = \frac{\text{न व}^२ \text{. ज्या } \frac{१८०^\circ}{\text{न}} \text{.कोज्या} \frac{१८०^\circ}{\text{न}}}{\text{न व}^२ \text{. स्प } \frac{१८०^\circ}{\text{न}}} = \text{कोज्या}^२ \frac{१८०^\circ}{\text{न}} ।$$

अत्र यदि न $= \infty$ स्यात् तदा

$$\frac{\text{प}}{\text{पा}} = \text{कोज्या} \frac{१८०^\circ}{\infty} = \text{कोज्या} ०^\circ = १$$

$$\text{तथा } \frac{\text{फ}}{\text{फा}} = \text{कोज्या}^२ \frac{१८०^\circ}{\infty} = \text{कोज्या}^२ ०^\circ = १$$

$\therefore$ प = पा तथा फ = फा भवेत् ।

अत एव वृत्तान्तर्बहिर्लग्नबहुभुजक्षेत्रयोर्भुजसंख्या यथा यथाधिका स्यात्तथा तथा ते क्षेत्रे प्रत्येकं तद्वृत्तक्षेत्रासन्ने भवेताम् तथा च भुजसंख्याया आनन्त्ये ते क्षेत्रे सर्वांशैर्मिथस्तद्वृत्तं च मिलेताम्। अतोवृत्तं बहुभुजक्षेत्रं भवितुमर्हति। यत्र भुजसंख्याऽनन्ता भवति। अत एव तद्वृत्तपरिधिस्तद्वृत्तव्यासार्धात्समानगुणो भवति तद्वृत्तफलं च तद्वृत्तव्यासार्द्धवर्गात्समानगुणं भवतीत्यवगम्यते।

प्रक्र० ५२—अथ वृत्तक्षेत्रस्य परिधिफलयोरानयनयुक्तिप्रकारः।

(१) अत्र किल वृत्तान्तर्गतबहुभुजक्षेत्रपरिधिः $=$ २ न व. ज्या $\frac{१८०^\circ}{\text{न}}$ ।

---

‡ इदमेव क्षेत्रमितेर्द्वादशाध्यायस्य १, २, प्रतिज्ञाभ्यामपि सिध्यति।

अथ यथा यथा (न) संख्याधिकास्यात्तथा तथाऽयं परिधिः वृत्तपरिधेरासन्नतरो भवेत् इति हेतोः पूर्वं $\left(\text{ज्या}\,\frac{१८०^\circ}{\text{न}}\right)$ अस्या तथा मानं साध्यते यथाऽत्र (न) संख्यामहती स्यात् ।

तथा हि ∴ (२४) प्रक्रमस्थात् (फा) तः

$$\text{कोज्या}\,\frac{\text{अ}}{२}=\frac{१}{\sqrt{२}}\sqrt{१+\text{कोज्या आ}}$$ *

---

* अत्र २४ प्रक्रमस्थ (फा) अनुसारतः,

$$२\,\text{कोज्या}^२\,\frac{\text{आ}}{२}=१+\text{कोज्या आ},\ \therefore\ \text{कोज्या}\,\frac{\text{आ}}{२}$$

$$=\frac{१}{\sqrt{२}}\sqrt{१+\text{कोज्या आ}},$$

अत्र आ $= ९०^\circ$, इति कल्पिते, कोज्या ९० $=$ ०, ∴ कोज्या $\frac{९०^\circ}{२}$

$$=\frac{१}{\sqrt{२}}\sqrt{१+०}=\frac{१}{\sqrt{२}},$$

पुनः आ $=\frac{९०^\circ}{२}$ इति कल्पिते, $\frac{\text{कोज्या}\,९०^\circ}{२^२}=\frac{१}{\sqrt{२}}\sqrt{१+\frac{१}{\sqrt{२}}}$ इतोऽग्रे

आ $=\frac{९०^\circ}{२^२},\ \frac{९०^\circ}{२^३},$ इत्यादि कल्पिते पूर्वपूर्वकोटिज्यास्वरूपाणां रूपयुतानां मूलेषु $\frac{१}{\sqrt{२}}$ एतद् गुणितेषु तदुत्तरकोटिज्यास्वरूपाण्युत्पद्यन्ते । यथा, आ $=\frac{९०^\circ}{२^२}$ इति कल्पिते,

कोज्या $\frac{९०^\circ}{२^३}=\frac{१}{\sqrt{२}}\sqrt{१+\frac{१}{\sqrt{२}}\sqrt{१+\frac{१}{\sqrt{२}}}}$, इत्यादि ।

एवं $\frac{१८०^\circ}{\text{न}}$ अत्र न संख्यायाः परममहत्वे चापस्य परमह्रासाच्चापजीवयोस्तुल्यत्वं भवति । अत एव न गुणितज्यासंख्या वृत्तपरिधितुल्या भवतीति स्फुटम् । एतदर्थमेवायं प्रयासो ज्ञेयः ।

$\therefore$ कोज्या $\frac{९०^\circ}{२} = \frac{१}{\sqrt{२}}$, कोज्या $\frac{९०^\circ}{२^२} = \frac{१}{\sqrt{२}}\sqrt{१+\frac{१}{\sqrt{२}}}$ ।

कोज्या $\frac{९०^\circ}{२^३} = \frac{१}{\sqrt{२}}\sqrt{१+\sqrt{१+\frac{१}{\sqrt{२}}}}$

एवमग्रेऽपि ।

अनया युक्त्या कोज्या $\frac{९०^\circ}{२\,प}$ अस्य तथा मानं गणयितुं शक्यते यथाऽत्र (प) संख्या महती स्यात् ।

तथा च यदि न $= {}_२प$ कल्प्येत

तदा ज्या $\frac{१८०^\circ}{न} =$ २ कोज्या $\frac{९०^\circ}{२\,प}$. ज्या $\frac{९०^\circ}{२\,प}$

$=$ २ कोज्या $\frac{९०^\circ}{२\,प}\sqrt{१ - कोज्या^२ \frac{९०^\circ}{२\,प}}$ आसन्नं स्यात् ।

एवमानीतं ज्या $\frac{१८०^\circ}{न}$ अस्य मानं (न) संख्यया गुणितं सत्

३.१४१५९२६५.........इत्यादि भवति इदं π * अनेन द्योत्यं स्यात् । तथा सति वृत्तपरिधिः $=$ २ π व ।

---

* अयं ग्रीकवर्णमालायाः "पाई" संज्ञको वर्णो रूपव्यासतत्परिध्योः स्थिरानुपात-सम्बन्धद्योतकः π कल्पितोऽस्ति । अस्य ३.१४१५९२६५ इदं मानमत्र निर्दिष्टं वर्तते । अतो रूपव्यासे π अयं परिधिस्तदा २ व व्यासे २ π व अयं परिधिरुपलभ्यते । श्रीभास्कराचार्यैः पूर्वोक्तानुपातसूचकं $\frac{२२}{७}$ इदं स्थूलं भिन्नं लीलावत्यामुपदिष्टं, यच्च दशमलव-स्थानद्वयपर्यन्तमेव वास्तवं भवति । एवं $\frac{३९२७}{१२५०}$ इदं तदपेक्षया सूक्ष्मं भिन्नं यदैर्निर्दिष्टं, तदपि दशमलवस्थानचतुष्कपर्यन्तमेव वास्तवं भवति । इतोऽपि सूक्ष्मतरं स्वल्पतरं च $\frac{३५५}{११३}$ इदं दशमलवस्थानपंचकं यावद्वास्तव भिन्नं भिन्नसंख्याया आसन्नमानानयनरीत्या सिध्यति । अत इदं व्यवहारार्थमुपयुज्यते । अथ पूर्वोक्त "पाई" वर्णद्योतकमानानयनप्रकारो लीलावत्यां टिप्पणीरूपेण प्रस्तुतग्रन्थकर्तृ निर्दिष्टः प्रदर्श्यते । "अत्र कोटिमितं महत्

(२) अनन्तरोक्त प्रक्रमे सङ्केतितयोः (प) (फ) वर्णयोः क्रमेण माने

$$\text{२ नव .ज्या}\frac{१८०^\circ}{\text{न}}\text{ । नव}^{२}\text{. ज्या }\frac{१८०^\circ}{\text{न}}\text{. को ज्या }\frac{१८०^\circ}{\text{न}}\text{ ।}$$

$$\therefore \frac{\text{फ}}{\text{प}} = \frac{\text{न व}^{२}\text{. ज्या }\frac{१८०^\circ}{\text{न}}\text{. को ज्या }\frac{१८०^\circ}{\text{न}}}{\text{२ न व. ज्या}\frac{१८०^\circ}{\text{न}}} = \frac{१}{२}\text{ व. को ज्या }\frac{१८०^\circ}{\text{न}}\text{ ।}$$

अथ वृत्तरूपे बहुभुजक्षेत्रे न $=\infty$ । अतएव कोज्या $\frac{१८०^\circ}{\text{न}}$ = कोज्या $०^\circ = १$,

---

व्यासार्धं प्रकल्प्य परिधिकोटयंशतोऽप्यल्पविभागस्यार्धांशज्यानयनप्रकारेण जीवा प्रसाध्या। ततो यत्संख्याकविभागस्य ज्या तत् संख्यया सा गुणिता परिधिर्भवतीति युक्त्या कोटिद्वयव्यासे ६२८३१८५३ अथ परिधिः प्रसाधितोऽस्ति ।" अत्र कोटिद्वयव्यासेऽस्माभिः पूर्वोक्तपरिधिसाधनार्थं गणितक्रिया प्रदर्श्यते ।

कल्प्यताम्, न = परिधिविभागाः = १५००००००, ∴ एकविभागमानम् = $\frac{३६०}{\text{न}} = \frac{१२९६०००''}{\text{न}} = \frac{१६२}{१८७५}$ = '०८६४ । अस्य विभागस्य परिशिष्टोक्त सूक्ष्मचापज्यानयनविधिना ज्या प्रसाध्यते ।

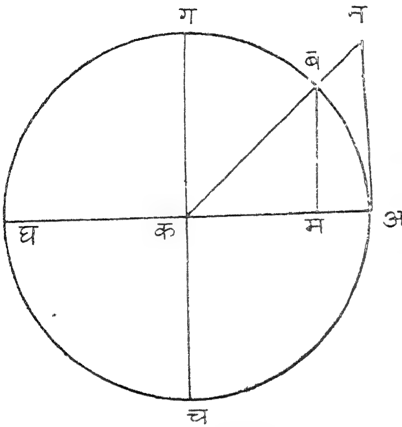
'०८६४ अस्य घातमापकः = २-९३६५१३७

स्थिर घातमापकः = ४-६८५५७४९

योगः = ३-६२२०८८६ इयमेवोक्तसूक्ष्मचापस्य घातमापक ज्या, अत्रापेक्षितछेदनरेखासंस्कारस्य शून्यसमत्वात् । अस्याः स्वाभाविक ज्यायां परिवर्तितरूपं = ७-४१८८७९०२ = '००००००४१४८८७९०२, इदं न संख्यया गुणितं ६२८३१८५३ इदं कोटिव्यासार्द्धे परिधिमानम्, अतो रूप व्यासार्द्धे परिध्यर्धमानम् = ३.१४१५९२६५ = π मानम् । अत्र स्थिरघातकापकः ज्या १", इति ज्ञेयम् । अतएव घा १": घा. ०८६४::ज्या १": ज्या-०८६४,

$$\therefore \text{ ज्या .०८६४} = \frac{\text{ज्या १}'' \times \text{ज्या.०८६४}}{\text{घा १}''}\text{,}$$ एवं सूक्ष्मचापज्यानयनविधिरुपपद्यते ।

$\therefore$ वृत्ते $\frac{फ}{प} = \frac{१}{२}$ व $\therefore$ फ $= \frac{१}{२}$ व. प ।*



अथ पूर्वसिद्धम् प = २ π व

$\therefore$ फ = π व^२ ।

(२) एवं अ क ब वृत्तखण्डस्यापि फलं शीघ्रमवगम्यते । (पार्श्वस्थं क्षेत्रं द्रष्टव्यम्) तथा हि, अत्र किल अब चापदैर्घ्यम् = अ, व्यासार्द्धम् = व, तथा च क्षेत्रमितेः षष्ठाध्यायस्य त्रयस्त्रिंशप्रतिज्ञयैवं सिध्यति ।

अ क ब वृत्ताखण्डम् : अ ग घ च$\odot$: : अ : २ π व ।

$$\therefore \text{अ क ब वृत्तखण्डम्} = \frac{अ}{२\pi व} \times \text{अ ग घ च} \odot = \frac{अ}{२\pi व} \times \pi व^२ =$$

$\frac{१}{२}$ अ ब ।†

---

* अत्र $\frac{ब}{२} = \frac{व्यास}{४}$, अतोऽनेन "वृत्तक्षेत्रे परिधिगुणितव्यासपादः फलं स्यात्" इति श्री भास्करोक्तमुपपद्यते ।

† अत्र अ = अभीष्टव्यासार्धीयवृत्तखण्डचापदैर्घ्यम्, इतिप्रकल्प्य वृत्तखण्डफलं प्रसाधितम् । अथ अ = वृत्तखण्डचापसम्मुखकोणः, इतिप्रकल्प्य वृत्तखण्डफलं प्रसाध्यते । अत्राभीष्टव्यासार्धीय अ ब चापः = अ $\times$ व (१४ प्रक्र॰), ततो रेखागणितेन,

$$\frac{\text{वृत्ताखण्डफलम्}}{\text{वृत्तफलम्}} = \frac{\text{अ ब चापदैर्घ्यम्}}{\text{वृत्तपरिधिः}} = \frac{अ \times व}{२\pi व} = \frac{अ}{२\pi}$$

$$\therefore \text{वृत्ताखण्डफलम्} = \frac{\text{अ ब} \times \text{अ ग घ च}\odot}{\text{वृत्तपरिधिः}} = \frac{अ \times \pi व^२}{२\pi} = \frac{अ}{२} \times व^२ ।$$

अस्मादिदमवगम्यते, यत्र चापदैर्घ्यमनिर्दिश्य तत्स्थाने चापसम्मुखकोणो निर्दिष्टो भवति, तत्रतत्कोणस्यांशादिमानात् ५२ प्रक्रमोक्तविधिना तत्कोणसम्मुख चापदैर्घ्यमवगत्यानेनप्रकारेण वृत्तखण्डफलं प्रसाध्यम् । यत्र चाभीष्टव्यासार्धीयचापदैर्घ्यं निर्दिष्टं भवति तत्र ग्रन्थोक्तदिशा वृत्ताखण्डफलं प्रसाध्यमिति । तदनुसारमेव तृतीयाध्यायस्याभ्यासार्थमुदाहरणमालायाः २५ तमः प्रश्नो निर्दिष्टोऽस्ति ।

(४) अ ब चापस्य ब म जीवा, अ न स्पर्श रेखा स्यात् । अथ यदि अ व रेखा क्रियते तदा अ क ब वृत्तखण्डम् अ क ब त्रिभुजादधिकं अ क न त्रिभुजाच्चोनं भवेत् ।

$\therefore$ $\frac{1}{2}$ अक. अब > $\frac{1}{2}$ अ क.ब म < $\frac{1}{2}$ अ क.अ न ।

$\therefore$ अ ब > ब म < अ न ।

अतः अ क ब लघुकोणसम्मुखचापः अ ब स्वज्यातोऽधिकः स्वस्पर्शरेखातश्च न्यूनो भवति । तदेव विलिख्य प्रदर्श्यते ।

अ > ज्या अ < स्प अ, अथ यदि अ = ० स्यात् तर्हि

$$* \ \frac{\text{ज्या अ}}{\text{स्प अ}} = \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{व}} = \frac{\text{कोज्या } 0^\circ}{\text{व}} = \frac{\text{व}}{\text{व}} = 1,$$

अस्मादिदमनुमीयते । चापस्यात्यन्तह्रासे तज्ज्यास्पर्शरेखे मिथस्तुल्ये भवतः । अतएव ते प्रत्येकं स्वचापेन समे स्याताम् ।

तथा च $\frac{\text{ज्या अ}}{\text{अ}} = \frac{\text{स्प अ}}{\text{अ}} = 1$ एवं स्यात् ।

प्रक० ५३ । रूपव्यासार्द्धे चापस्य या जीवादयस्ताएव तच्चापसम्बन्धिकोणस्यापि भवन्तीति (१४ प्र० द्र०) । तत्र यच्चापदैर्घ्यमानं तदेव तत्सम्बन्धिकोणस्य स्यात् । तच्च तस्य कोणस्य चापीयं मानमुच्यते । बीजक्रियया सम्पाद्यमाने त्रिकोणमिति गणिते कोणस्य चापीयमानमेव गृह्यते ।

अथ यदि (व) व्यासार्द्धे (२ π व) अयं पूर्वसिद्धः परिधिस्तदा रूपव्यासार्द्धे क इत्यनुपातेनाप्तं (२ π) रूपव्यासार्द्धे परिधिदैर्घ्यम् ।

अतः π = ३.१४१५९२६५ इत्यादिकं रूपव्यासार्द्धेऽर्द्धपरिधिमानं समकोण द्वयस्य चापीयं मानं स्यात् ।

$$* \ \frac{\text{ज्या अ}}{\text{स्प अ}} = \frac{\text{ज्या अ}}{\text{व}} \div \frac{\text{स्प अ}}{\text{व}} = \frac{\text{ज्या अ}}{\text{व}} \times \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}} = \frac{\text{को ज्या अ}}{\text{व}}$$

इतोऽग्रे स्फुटम् ।

तथा च यस्य कोणस्य चापीयं मानं रूपं स्यात् तस्य

$\frac{१८०^\circ}{३.१४१५९ \text{ इ.}}$ $= ५७.२९५७ \text{ इ०} = ५७^\circ।१७'।४४''.६$ इत्याद्यंशादिमानं† भवेत्।

अस्मान्निर्दिष्टकोणस्याशादिमानाच्च तत्कोणसम्बन्धि चापदैर्घ्यावगमः सुगमः।

अथ तृतीयाध्याय सम्बन्धिनः प्रश्नाः

(१) उदाहरणम् $अ = \sqrt{३}$, $क = \sqrt{२}$, $ग = \frac{\sqrt{६}+\sqrt{२}}{२}$, एभ्यस्त्रिभुज-भुजेभ्यस्तत्कोणत्रयमानमानीयताम्।

अत्र, भुजैक्यार्धम् $= स = \frac{२\sqrt{३}+३\sqrt{२}+\sqrt{६}}{४}$ ......(१)

$$स - अ = \frac{२\sqrt{३}+३\sqrt{२}+\sqrt{६}}{४} - \sqrt{३}$$

$$= \frac{३\sqrt{२}-२\sqrt{३}+\sqrt{६}}{४} \text{ ....(२)}$$

$$स - क = \frac{२\sqrt{३}+३\sqrt{२}+\sqrt{६}}{४} - \sqrt{२} = \frac{२\sqrt{३}-\sqrt{२}+\sqrt{६}}{४} \text{ ......(३)}$$

$$स - ग = \frac{२\sqrt{३}+३\sqrt{२}+\sqrt{६}}{४} - \frac{२\sqrt{६}+२\sqrt{२}}{४}$$

$$= \frac{२\sqrt{३}+\sqrt{२}-\sqrt{६}}{४} \text{ ....(४)}$$

---

† एतेन वृत्तकेन्द्रलग्नाभीष्टकोणसम्मुखचापदैर्घ्यमानमवगन्तुं शक्यते। यथा, रूपव्यासार्द्धे π परिमिति परिध्यर्धं चापदैर्घ्ये तत्सम्मुखकोणांशाः १८०° मिता भवन्तीत्यतोऽनुपातेन रूपमित चापदैर्घ्ये $\frac{१८०^\circ}{३.१४५९\cdots \text{ इ.}} = ५७^\circ।१७'।४४.''६$ एतावन्तस्तत्सम्मुखकोणांशा लभ्येरन्। तत एभिः कोणांशैरूपमित चापदैर्घ्यमुपलभ्यते तदेष्टकोणांशैरभीष्टकोणसम्मुख चापदैर्घ्यमवगतं भवेत्। इदमभीष्टव्यासार्धगुणितमभीष्टव्यासार्धीयचापदैर्घ्यं स्यात्।

$\therefore$ (१) $\times$ (२) $= \left\{ \frac{(३\sqrt{२}+\sqrt{६})^२-(२\sqrt{३})^२}{१६} \right\}$

$= \frac{१२+१२\sqrt{३}}{१६} = \frac{३(१+\sqrt{३})}{४}$ ....(प)

एवं (३) $\times$ (४) $= \left\{ \frac{(२\sqrt{३})^२-(\sqrt{२}\sqrt{६})^२}{१६} \right\}$

$= \frac{४+४\sqrt{३}}{१६} = \frac{१+\sqrt{३}}{४}$ ....(फ)

$\therefore$ (प) $\times$ (फ) $= \frac{३(१+\sqrt{३})}{४} \times \frac{१+\sqrt{३}}{४}$

$= \frac{३(१+\sqrt{३})^२}{१६}$, अस्य मूलम् $= \frac{\sqrt{३}(१+\sqrt{३})}{४}$,

एवं क $\times$ ग $= \sqrt{३}+१$, $\therefore$ ३६ प्रक्रमेण, ज्या आ

$= \frac{१}{क.ग} \sqrt{स(स-अ)(स-क)(स-ग)}$

$= \frac{\sqrt{३}(१+\sqrt{३})}{४} \times \frac{२}{\sqrt{३}+१} = \frac{\sqrt{३}}{२}$, $\therefore$ आ $= ६०^\circ$:

अथ प्रकारान्तरेण का कोणमानं प्रसाध्यते ।

३८ प्रक्रमेण, कोज्या का $= \frac{ग^२+अ^२-क^२}{२ अ.ग}$

$= \frac{८+४\sqrt{३}+१२-८}{४\times२ अ.ग} = \frac{३+\sqrt{३}}{२ अ.ग}$

$= \frac{\sqrt{३}(\sqrt{३}+१)}{२ अ.ग}$, अत्र २ अ.ग $= \sqrt{३}\times\sqrt{२}(\sqrt{३}+१)$,

$\therefore \frac{\sqrt{३}(\sqrt{३}+१)}{२ अ.ग} = \frac{\sqrt{३}(\sqrt{३}+१)}{\sqrt{३}\times\sqrt{२}(\sqrt{३}+१)} = \frac{१}{\sqrt{२}}$,

$\therefore$ का $= ४५^\circ$, तथा गा $= १८०^\circ-(आ+का) = ७५^\circ$ ।

(२) उदा० । अ = ७५, क = ५२, ग = ६३, एभ्यस्त्रिभुजभुजेभ्यः स्प $\frac{१}{२}$ आ, अस्य मानमानयत ।

अत्र $स = \frac{२५+५२+६३}{२} = ७०$, तथा $स—अ = ४५$, $स—क = १८$,

$स—ग = ७$, अतः ४० प्रक्रमानुसारं, स्प $\frac{१}{२}$ आ

$= \sqrt{\frac{(स—क)(स—ग)}{स(स—अ)}}$, अत उत्थापनेन, $\sqrt{\frac{१८ \times ७}{४५ \times ७०}} = \frac{१}{५}$ ।

(३) उदा० । यस्य त्रिभुजस्य भुजत्रययोगः २० हस्तमितः, फलं $१०\sqrt{३}$ वर्गहस्तात्मकं, आकोणश्च ६०° मितस्तत्र प्रत्येकभुजविस्तृतिं निर्दिशत ।

कल्प्यताम्, अ, क, ग, भुजाः, भुजयुत्यर्धम् = स = १०, तदा ४१ प्रक्रमेण

$\triangle = ज्या आ \times \frac{क.ग}{२} = \frac{\sqrt{३}}{२} \times \frac{क.ग}{२} = १०\sqrt{३}$,

$\therefore$ क ग = ४०, ततः ४० प्रक्रमेण,

कोज्या $\frac{६०^\circ}{२} = \frac{\sqrt{३}}{२} = \sqrt{\frac{१०(१०-अ)}{४०}} = \sqrt{\frac{१०-अ}{४}}$, पक्षयोर्वर्गेण,

$\frac{३}{४} = \frac{१०-अ}{४}$, $\therefore अ = ७$, एवं ज्या $\frac{६०^\circ}{२} = \frac{१}{२} = \sqrt{\frac{(१०-क)(१०-ग)}{४०}}$

पक्षयोर्वगेण, $\frac{१}{४} = \frac{१००-१०(क+ग)+४०}{४०}$,

$\therefore १० = १४० - १०(क+ग)$, अत्र $क = \frac{४०}{ग}$, $\therefore १ = \frac{१४ग-४०-ग^२}{ग}$,

$\therefore ग^२ - १३ग = -४०$, वर्गसमीकरणनियमेन.

$(ग - \frac{१३}{२})^२ = \frac{९}{४}$ मूलग्रहणेन,

ग = ८, $\therefore$ क = ५ ।

(४) उदा० । एकस्य द्वादशसंख्याकसमानर्जुभुजक्षेत्रस्य प्रत्येकभुजमितिः २० हस्ताः, तदा तदन्तर्बहिश्च कृतवृत्तयोर्व्यासार्धमाने तत्फलं च निर्दिशत ।

अत्र ग्रन्थस्थ क्षेत्रं द्रष्टव्यम् । अत्र सर्वभुजसंख्या = न = १२, भुजः = अ ग = २० हस्ताः, भुजार्धम् = अ ब = १०, क = अन्तर्बहिश्च कृतवृत्तयोः केन्द्रम्, अत्र बहुभुज-क्षेत्रान्तः कृतवृत्तव्यासार्धम = केन्द्रात्तत्तद्भुजोपरि कृतोलम्बः क ब = व व्यासार्धम् । यतो हि प्रति त्रिभुजमुक्तरेखायास्तुल्यत्वाद् वृत्तपरिधिसंलग्नत्वाच्च, एवमुक्त-क्षेत्राद्बहिः कृतवृत्तव्यासार्धम् = केन्द्राद् बहुभुज क्षेत्रस्य प्रत्येक कोणावधि कृता रेखा = अ क = वा व्यासार्धम् । अत्रापि प्रति त्रिभुजमुक्तरेखायास्समत्वात् वृत्त-परिधिलग्नत्वाच्च, अत्र अ ब = अ क × ज्या ∠ अ क ब, ∵ $\frac{३६०^\circ}{१२}$ ३०° = ∠अ क ग, ∴ ∠अ क ब = १५° । अथ, ज्या∠अ क ब : अ ब : : कोज्या ∠अ क ब : क ब, ∴ क ब = व = अ ब × कोस्प ∠अ क ब = १० × कोस्प १५°

$$= \frac{१० \times \sqrt{३}+१}{\sqrt{३}-१} = \frac{२ \times १०}{४-२\sqrt{३}} = \frac{१०}{२-\sqrt{३}}$$ = बहुभुजक्षेत्रान्तः कृत वृत्त व्यासार्धम् ।

एवं ज्या ∠अ क ब : अ ब : : १ : अ क,

$$\therefore \text{अ क} = \text{वा} = \frac{\text{अ ब}}{\text{ज्या} \angle \text{अ क ब}}$$

$$= \frac{१०}{\text{ज्या } १५^\circ} = १० \times \frac{२\sqrt{२}}{\sqrt{३}-१} = १० \times \sqrt{२}(\sqrt{३}+१)$$

$$= १० \times (\sqrt{६}+\sqrt{२}) = २०\sqrt{२}(\sqrt{३}+१)$$ = बहिर्लग्नवृत्तव्यासार्द्धम् ।

$$\text{एवंक्षेत्रफलम्} = \text{न.}\frac{\text{अ ग. क ब}}{२} = \frac{१२ \times १० \times १०}{२-\sqrt{३}} = १२०० (२+\sqrt{३})$$

= ४४७८.४६............वर्गहस्ताः ।

(५) उदा० । यस्य वृत्तस्य व्यासः १० हस्त परिमितः, तत्क्षेत्रफलं प्रदर्श्य तस्यैव वृत्तस्य यद्वृतखण्डचापसम्मुखकेन्द्रलग्नकोणः २२°.५ अंशमितस्तद्वृत्ताखण्ड फलमपि प्रदर्श्यताम् ।

अत्र π = ३·१४१५६, व्यासार्धम् = व = ५, ∴ ५२ प्रक्रमेण वृत्तफलम् = π × व^{२} = ३·१४१५६ × २५ = ७८.५३९७.........इत्यादि ।

अथ वृत्तखण्डफलसाधनाय, प्रश्नोक्तचापकोणस्यांशादिमानात्तत्कोण सम्बन्धि चादैर्घ्य ५३ प्रक्रमोक्तरीत्याऽवगन्तव्यं भवति, यथा, ५७°.२६......इत्याद्यं-

शादिमानेन रूपमितं चापदैर्घ्यमुपलभ्यते, तदा २२°.५ एतदंशादिमानेन कियच्चापदैर्घ्यमुपलब्धं स्यादिति त्रैराशिकेन लब्धमुक्तकोणचापदैर्घ्य = ·३९२··· ···इत्यादि, ततः ५२ प्रक्रमस्थटिप्पण्यनुसारं वृत्तखण्डफलं = $\frac{व^२ \times अ}{२} = \frac{२५ \times ·३९२\cdots}{२}$ = ४.९०······इत्यादि ।

अत्रेदमवधेयं, प्रश्नेऽभीष्टव्यासार्धे चापदैर्घ्य निर्दिष्टं चेद्ग्रन्थोक्तदिशा वृत्तखण्डफलं= $\frac{व \times अ}{२}$, एवं भवतीति । प्रकृते रूपव्यासार्द्धे अकोण चापदैर्घ्य प्रसाधितमतो वृत्तखण्डफलं = $\frac{व^२ \times अ}{२}$ ।

अभ्यासार्थमुदाहरणानि (३)

निम्नलिखितत्रिभुजभुजेभ्यस्तत्तत्फलानि प्रसाधयत ।

(१) अ = १३, क = १४, ग = १५, (२) अ = १८, क = २४, ग = ३०,

(३) अ = २५, क = ५२, ग = ६३, (४) अ = १५, क = ३६, ग = ३९,

(५) अ = ३५, क = ८४, ग = ९१, (६) यदि का = ४५°, गा = ६०°,

अ = २($\sqrt{३}$ + १) हस्तास्तदैतत्त्रिभुजफलं = ६ + २$\sqrt{३}$,

एतन्मित वर्गहस्तात्मकं भवतीति कथम् ।

(अत्र त्रिभुजक्षेत्रफलं गुणवर्गगुणितं सत् गुणगुणितभुजत्रिभुजस्य क्षेत्रफलेन समं भवतीति नियमोऽत्रानुसन्धेयः । तदनुसारमत्र मूलत्रिभुजकोणाः का = ४५°, गा = ६०°, आ = ७५°, $\sqrt{}$अतस्तत्सम्मुखभुजाश्च, क = $\frac{१}{\sqrt{२}}$, ग = $\frac{\sqrt{३}}{२}$, अ = $\frac{\sqrt{३}+१}{२\sqrt{२}}$, अत्र ४$\sqrt{२}$ एतद्गुणेन गुणितो मूलत्रिभुजस्य अ भुजो गुण गुणितभुजत्रिभुजस्य प्रश्नोक्तेन अ भुजेन समोऽतो गुण गुणितभुजत्रिभुजस्य भुजाः, क = ४, ग = २$\sqrt{३} \times \sqrt{२}$ = २$\sqrt{६}$, अ = २($\sqrt{३}$ + १), एभ्यो भुजेभ्यः प्रसाधितं क्षेत्रफलं प्रश्नोक्तक्षेत्रफलेन समं भवति ।)

(७) कस्मिंश्चित्त्रिभुजे अ = २५, क = ५२, ग = ६३, तदा

$\frac{\text{स्प आ}}{२}$, $\frac{\text{स्प का}}{२}$, $\frac{\text{स्प गा}}{२}$, एतन्मानानि प्रसाधयत।

(८) अ = १८, क = २४, ग = ३०, एभ्यस्त्रिभुजभुजेभ्य स्तदीय सर्व-कोणज्यानां मानान्यानयत।

(९) यत्र त्रिभुजे अ = १२५, क = १२३, ग = ६२, तदा सर्वेषां तत्कोणानां तत् कोणार्ध्दानां च ज्याः प्रदर्शयत।

(१०) अ = ३५, क = ८४, ग = ९१, एभ्यस्त्रिभुजभुजेभ्यस्तदीयसर्वकोण-स्पर्शरेखाणां मानानि ब्रूत।

(११) अ = १३, क = १४, ग = १५, एभ्यस्त्रिभुजभुजेभ्यः प्रसाधितसर्व-कोणज्या मानपट्टीद्वारा परीक्षणीयाः।

निम्नलिखित वृत्तान्तर्गतचतुर्भुजभुजेभ्यस्तत्तत्क्षेत्रफलं निर्दिशत।

(१२) ३, ५, ७, ९, क्रमशोहस्तात्मकभुजाः।

(१३) ७, १०, ५, २, क्रमशोहस्तात्मकभुजाः।

(१४) कस्यचिच्चतुर्भुजस्य ३, ४, ५, ६, क्रमशो हस्तात्मकभुजाः, तदीय सम्मुखकोणयुतिश्च १२०°, तदा तच्चतुर्भुजफलम् = $३\sqrt{३०}$, इति समर्थ्यताम्।

(१५) कस्यचिच्चतुर्भुजस्य ३, ३, ४, ४, क्रमशो हस्तात्मकभुजास्सन्ति, तदा तच्चतुर्भुजक्षेत्रस्यान्तर्बहिश्च कृतवृत्तयो र्व्यासार्द्धमाने निर्दिशत।

(अत्र ४४ प्रक्रमस्थटिप्पणी द्रष्टव्या।)

(१६) यच्चतुर्भुजं कस्यचिद्वृत्तस्यान्तर्लग्नं तदन्यवृत्तस्य च बहिर्लग्नमपि कर्तुं शक्यते, तदुभयचतुर्भुज क्षेत्रफलं = $\sqrt{\text{अ.क.ग.घ}}$, तथा तच्चतुर्भुजान्तर्लग्नवृत्त व्यासः = $\frac{२\sqrt{\text{अ.क.ग.घ.}}}{\text{अ} + \text{क} + \text{ग} + \text{घ}}$, इति प्रमाणीकुरुत।

(१७) द्वादशव्यासार्धीयवृत्तबहिर्लग्नस्य दशसंख्याकसमानर्जुभुजक्षेत्रस्य परिधिर्दशमलवस्थानद्वयं यावत्सूक्ष्मः प्रदर्शनीयः। (अत्र दशमलव संख्यावद्गुण-नादिकार्यसम्पादनायाष्टादशांशानां .३२४९२ इयं स्वाभाविकी स्पर्शरेखा ज्ञेया)।

(१८) रूपव्यासार्धीयवृत्तबहिर्लग्नस्य द्वादशसंख्याकसमानर्जुभुजक्षेत्रस्य भुजविस्तृत्तिर्दशमलवस्थानत्रयावधि निर्देश्या । (अत्र पञ्चदशांशानां स्वाभाविकी स्पर्शरेखा = २६७६५)

(१९) यस्य पञ्चसख्याकसमानर्जुभुजक्षेत्रस्य प्रत्येकभुजविस्तृतिर्हस्तपरिमिता वर्तते, तस्य क्षेत्रफलं प्रचक्ष्व । (अत्र ३६° अंशानां स्वाभाविकी कोटिस्पर्शरेखा = १.३७६३८) ।

(२०) ययोः षडष्टसंख्याकसमानर्जुभुजक्षेत्रयोः प्रत्येकस्य परिधिः २४ हस्तमितो वर्तते तयोः क्षेत्रफलान्तरं कियत् स्यात् ।

(कल्प्यताम् $\pi = ३.१४१५६$)

(२१) यस्य वृत्तस्य परिधिः ७४ हस्तात्मकोऽस्ति, तस्य क्षेत्रफलं वद ।

(२२) यस्य वृत्तस्य व्यासः १२५० हस्तमितोऽस्ति, तस्य परिधि प्रदर्शय ।

(२३) यस्य वृत्तस्य व्यासः ६ हस्तमितोऽस्ति, तदवृत्तखण्डस्य क्षेत्रफलं कियद्भवेत्. यच्चापसम्मुखः केन्द्रगतकोणः ३०° अंशपरिमितः स्यात् ।

(२४) कस्यचिद्वृत्तखण्डस्य क्षेत्रफलं १० वर्गहस्तात्मकमस्ति, यदि तद्वृत्तव्यासार्ध हस्तत्रयमितं भवेत्, तदा तद्वृत्तखण्डचापसम्मुखकेन्द्रलग्नकोणं प्रवदत ।

(२५) कस्यचिद्वृत्तखण्डस्य परिमितिः सीमारेखा वा दशहस्तमिताऽस्ति, तदीयवृत्तव्यासार्द्ध हस्तत्रयमितं चेत्तद्वृत्तखण्डक्षेत्रफलं निगदत ।



चतुर्थोऽध्यायः

अत्र* त्रिभुजगणितं ततो वंशादीनां दैर्घ्यौच्च्याद्यवगमकोदाहरणानिच ।

त्रिभुजगणितम् ।

प्रक्र० ५४ । त्रिभुजस्य षण्णामवयवानामन्यतमेभ्य स्त्रिभ्योऽवयवेभ्यः शेषावयवज्ञानाय यद्गण्यते तत् त्रिभुजगणितसंज्ञं स्यात् । तत्र कोणत्रयमात्रज्ञाने शेषावयवानामनियतत्वान्न तत्र त्रिभुजगणितप्रसक्तिः ।

१ जात्यत्र्यस्रगणितम् ।

प्रक्र० ५५ । अत्र खलु एकावयवः समकोणत्त्वाज्ज्ञात एव शेषाणामन्यतमाभ्यां कोणद्वयेतरावयवाभ्यां शेषावयवावगमः (३७) प्रक्रमतः सुशकः । तथा हि,

प्रथमः प्रकारः, कल्प्यतां (अ) भुजो ज्ञातः, तत्सम्मुखः (आ) कोणश्च ज्ञात इति । तदा

$$\left\{\begin{array}{l} \because \text{ आ} + \text{का} = \text{गा} = ९०^\circ \\ \therefore \text{ का} = ९० - \text{आ एवं (का) कोणो ज्ञायते ।} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{अथ च } \because \text{ स्प आ} = \frac{\text{अ}}{\text{क}} \;\; \therefore \text{ क} = \frac{\text{अ}}{\text{स्प आ}} \\ \text{तथा ज्या आ} = \frac{\text{अ}}{\text{न}} \;\; \therefore \text{ ग} = \frac{\text{अ}}{\text{ज्या आ}} \end{array}\right\} \text{ अत्र}$$

---

* अस्मिन् चतुर्थाध्याये चेम्बर्सघाताङ्कसारण्याः प्रतिपदमुपयुज्यमानत्वात्तत्सारण्या उपयोगविधिर्घाताङ्कगणितस्य स्वल्पपरिचयप्रदानपुरस्सरं परिशिष्टे निर्दिष्टोऽस्ति । अत एतत्सर्वमादौ परिशिष्टप्रकरणतः सम्यक् परिज्ञाय पश्चादग्रिमग्रन्थानुशीलनं विधेयमिति सानुरोधं ज्ञाप्यते ।

(स्प अ), (ज्या आ)† अनयोरिष्टव्यासार्द्धे (त्रि) परिणामितयोः सिद्धे (क), (ग) माने $क = \frac{अ}{\frac{स्प\ आ}{त्रि}} = \frac{त्रि\ अ}{स्प\ आ}$ ।

$$ग = \frac{अ}{\frac{ज्या\ आ}{त्रि}} = \frac{त्रि\ अ}{ज्या\ आ},$$

अत्र किल त्रिज्या १०^१० एतावती कल्प्यते तस्या दशमूलो घातप्रमापकः १० भवन्ति । अतः (क) मानस्य घातप्रमापकः = *$घा_{द}$ क = १० + $घा_{द}$ अ − $घा_{द}$ स्प आ । एवं (ग) मानस्य घातप्रमापकः = $घा_{द}$ ग = १० + $घा_{द}$ अ − $घा_{द}$ ज्या आ,

एवं सर्वत्र घातप्रमापकरूपविधानमवगम्यम् ।

एवं शेषभुजौ ज्ञायेते ।

उदा० । अ = १२०, आ = ४५° । १४' । २३" शेषावयवाः के इति प्रश्नः।

अत्र का = ९०° − ४५° । १४' । २३" = ४४° । ४५' । ३७", तदा

$घा_{द}$ क = १० + $घा_{द}$ अ − $घा_{द}$ स्प आ

= १० + २.०७९१८१२ − १०.००३६३४२,

$$= \left\{ \begin{array}{l} +१२.०७९१८१२ \\ -१०.००३६३४२ \end{array} \right.$$

२.०७५५४७० = $घ_{द}$ ११९ ∴ क = ११९ ।

---

† अस्मिन् चतुर्थाध्याये समीकरणस्थितकोणीयज्यादीनामभीष्टव्यासार्धवृत्तीयचापीयत्वमपेक्ष्यते । अतः १५ प्रक्रमानुसारं तासां १० त्रिज्याहरः कल्पनीयो भवति । तेनात्र समीकरणनियमेन क्वचित् त्रिज्याया गुणकत्वं भाजकत्वं वा संभवति । तथैवात्र कोणानुपातेन त्रिभुजस्य ज्ञातावयवतः शेषावयवा ज्ञातव्या भवन्ति । भुजकोट्योरेकतरे ज्ञाते समकोणेतर ज्ञातकोणस्पर्श रेखया शेषावयवा ज्ञेयाः ।

* $घा_{द}$ इदं चिह्नं दशमूलघातप्रमापकद्योतकं स्यात् ।

अथ च घा$_{द}$ ग = १० + घा$_{द}$ अ _ घा$_{द}$ ज्या आ

= १० + २.०७६१८१२ — ६.८५१२६४५

$$= \left\{ \begin{array}{l} + \text{१२.०७६१८१२} \\ - \;\; \text{६.८५१२६४५} \end{array} \right.$$

= २.२२७८८६७ = घा$_{द}$ १६६ ∴ ग = १६६ ।

एवं सिद्धाः शेषावयवाः, का = ४४° । ४५′ । ३७″,

क = ११६

ग = १६६

द्वितीयः प्रकारः, कल्प्यतां (अ) भुजः तत्संलग्न (का) कोणश्च ज्ञात इति तदाऽत्र आ = ९०° — का

$$\text{प्र० ३७} \left\{ \begin{array}{l} \text{स्प का} = \dfrac{\text{क}}{\text{अ}} \;\therefore\; \text{क} = \text{अ. स्प का} \\[2ex] \text{कोज्या का} = \dfrac{\text{अ}}{\text{ग}} \;\therefore\; \text{ग} = \dfrac{\text{अ}}{\text{कोज्या का}} \end{array} \right.$$

(फ), (ग) अनयोर्घात प्रमापक रूपे

घा$_{द}$क = घा$_{द}$अ + घा$_{द}$ स्प का _ १०,

घा$_{द}$ग = १० + घा$_{द}$अ _ घा$_{द}$ कोज्या का ।

एवं शेषावयवा व्यक्ता भवन्ति ।

उदा० । अ = १२०, का = ४४° । ४५′ । ३७″ अत्र शेषावयवाः के इति प्रश्नः ।

अत्र आ = ९०° — (४४° । ४५′ । ३७″) = ४५° । १४′ । २३″

∴ घा$_{द}$ क = घा$_{द}$ अ + घा$_{द}$ स्प का — १०

= २.०७९१८१२ + ९.९९६३६५८ — १०

$$= \left\{ \begin{array}{l} + \;\; \text{२.०७९१८१२} \\ + \;\; \text{९.९९६३६५८} \\ - \text{१०} \end{array} \right.$$

= २.०७५५४७० = घा$_{द}$ ११९ ∴ क = ११९

एवं घा$_{द}$ ग = १० + घा$_{द}$ अ _ घा$_{द}$ कोज्या का

= १० + २.०७९१८१२ — ९.८५१२६४५

$$= \left\{ \begin{array}{l} +१२.०७६१८१२ \\ -\ ६.८५१२९४५ \end{array} \right.$$

$$= \quad २.२२७८८६७ \quad = घा_द\ १६६ \therefore ग = १६९$$

एवं सिद्धाः शेषावयवाः आ $= ४५^\circ । १४' । २३''$

क = ११६

ग = १६९ ।

तृतीयः प्रकारः, कल्प्यतां (ग) भुजतत्संलग्न (आ) कोणौ ज्ञाताविति ।

तदाऽत्र का $= ९०^\circ -$ आ

$$ज्या\ आ = \frac{अ}{ग} \therefore अ = ग.ज्या\ आ$$

$$कोज्या\ आ = \frac{क}{ग} \therefore क = ग.\ कोज्या\ आ$$

घातप्रमापकरूपे

$$घा_द अ = घा_द ग + घा_द\ ज्या\ आ - १०$$

$$घा_द\ क = घा_द\ ग + घा_द\ कोज्या\ आ - १०$$

एवं शेषावयवा व्यक्ता भवन्ति ।

उदा० । ग = १६९, आ $= ४५^\circ । १४' । २३''$ शेषावयवाः के इति प्रश्नः ।

अत्र का $= ९०^\circ - ४५^\circ । १४' । २३'' = ४४^\circ । ४५' ३७''$,

$$घा_द\ अ = घा_द ग + घा_द\ ज्या\ आ - १०$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} +\ २.२२७८८६७ \\ +\ ९.८५१२९४५ \\ -१० \end{array} \right.$$

$$= \quad २.०७९१८१२ \quad = घा_द\ १२० \therefore अ = १२० ।$$

$$घा_द\ क = घा_द\ ग + घा_द\ कोज्या\ आ - १०$$

$$= \begin{cases} + & २\cdot२२७८८६७ \\ + & ६.८४७६६०३ \\ - & १० \end{cases}$$

$$= \quad २\cdot०७५५४७० \quad = घा_{द}११६ \therefore क = ११६ ।$$

$$आ = ४५^\circ । १४' । २३''$$

एवं सिद्धाः शेषावयवाः $का = ४४^\circ । ४५' । ३७''$

$$अ = १२०$$

चतुर्थः प्रकारः, कल्प्यतां अ, ग भुजौ ज्ञातौ ।

$$तदा\ ज्या\ आ = \frac{अ}{ग} ।$$

अस्य घातमापकरूपम् $घा_{द}\ ज्या\ आ = १० + घा_{द}\ अ - घा_{द}\ ग$

एवं (आ) कोणे ज्ञाते ततः $का = ९० - आ$,

तथा $\frac{अ}{क} = स्प\ आ$, $\therefore\ क = \frac{अ}{स्प\ आ}$,

$\therefore\ घा_{द}क = १० + घा_{द}अ - घा_{द}\ स्प\ आ$ ।

एवं (का) कोण (क) भुजौ व्यक्तौ भवतः ।

यद्वा $क^{२} = ग^{२} - अ^{२}$ इति क्षेत्रमितेः प्रथमाध्यायस्य ४७ प्रतिज्ञया सिध्यति। अतः कोणनिरपेक्षविधिनैव (क) भुजो व्यक्तो भवति ।

उदा० । अ = १२०, ग = १६६, शेषावयवाः के इति प्रश्नः ।

अत्र $घा_{द}\ ज्या\ आ = १० + घा_{द}\ अ - घा_{द}\ ग$

$$= १० + २.०७९१८१२ - २.२२७८८६७$$

$$= \begin{cases} + १२.०७९१८१२ \\ - \ \ २.२२७८८६७ \end{cases}$$

$$= ९.८५१२९४५ \quad = घा_{द}\ ज्या\ ४५^\circ । १४' । २३''$$

$\therefore$ अ। = ४५° । १४′ । २३″

$\therefore$ का = ९०° — (४५°, १४′, २३″) = ४४° । ४५′ । ३७″

अथ च घा$_{द}$ क = १० + घा$_{द}$ अ — घा$_{द}$स्प आ

अस्मात् सिद्धम् (क) मानम् = ११९ ।

एवं सिद्धाः शेषावयवाः आ = ४५° । १४′ । २३″

का = ४४° । ४५′ । ३७″

का = ११९ ।

यद्वा क = $\sqrt{\text{ग}^{२} - \text{अ}^{२}}$ = $\sqrt{(१६९)^{२} - (१२०)^{२}}$ = ११९ सिद्धः स एव भुजः ।

पञ्चमप्रकारः, कल्प्यतां अ, क, भुजौ ज्ञातौ इति ।

तदा स्प आ = $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$ ।

यद्वा घा$_{द}$ स्प आ = १० + घा$_{द}$ अ — घा$_{द}$ क ।

एवं (आ) कोणं ज्ञात्वा ततः

का = ९०° — आ तथा

घा$_{द}$ग = १० + घा$_{द}$अ — घा$_{द}$ ज्या अ ।

एवं (का) कोण (ग) भुजौ विज्ञेयौ ।

यद्वा ग^{२} = अ^{२} + क^{२}, एवं क्षेत्रमितेः प्रथमाध्यायस्य (४७) प्रतिज्ञया (ग) भुजो व्यक्तो भवति ।

उदा० । अ = १२०, क = ११९, शेषावयवाः के इति प्रश्नः ।

अत्र घा$_{द}$ स्प आ = १० + घा$_{द}$ अ — घा$_{द}$ क

= १० + २·०७९१८१२ — २·०७५५४७०

$$= \begin{cases} + १२\cdot ०७६१८१२ \\ - \ २\cdot ०७५५४७० \end{cases}$$

$= १०\cdot ००३६३४२ =$ घा$_{द}$ स्प ४५° । १४′ । २३″

$\therefore$ आ = ४५° । १४′ । २३″

$\therefore$ का = ४४° । ४५′ । ३७″

तथा घा$_{द}$ ग = १० + घा$_{द}$ अ − घा$_{द}$ ज्या आ, अस्मात् सिद्धम्

(ग) भुजमानम् = १६६ ।

यद्वा ग $= \sqrt{(१२०)^{२} + (११६)^{२}} =$ १६६ सिद्धः स एव भुजः ।

यद्वा ग $= \sqrt{(१२०)^{२} + (११६)^{२}} =$ १६६ सिद्धः स एव ।

अभ्यासार्थमुदाहरणानि

जात्यत्रिभुजे

ज्ञातावयवाः		शेषावयवाः
(१) अ = २१ आ = ४६° । २३′ । ५०″	...	का = ४३° । ३६′ । १०″ क = २० । ग = २९
(२) अ = १०० आ = ५४° । १७′	...	का = ३५° । ४३′ क = ७१.९०१४२ ग = १२३.१६७७८
(३) अ = १३६ का = ६३° । ३१′ । ८″	...	आ = २६° । २८′ । ५२″ क = २७३, ग = ३०५
(४) अ = १३५ का = २५°, २३′	...	आ = ६४° । ३७′ क = ६४.०५४२८ ग = १४६.४२५५७
(५) ग = ५४७·२१ आ = ३१° । ४५′ । २२.४″	...	का = ५८° । १४′ । ३७·६″ अ = २८८ क = ४६५·२६
(६) ग = ६२१७ आ = १° । ११′ । ३७″	.	का = ८८° । ४८′ । २३″ अ = १६२, क = ६२१५

(७) $\left\{\begin{array}{l} अ = ४०६० \\ ग = ५७४१ \end{array}\right\} \ldots \left\{\begin{array}{l} आ = ४५^\circ \mid ०' \mid २५\cdot४'' \\ का = ४४^\circ \mid ५६' \mid ३४\cdot६'' \\ क = ४०५६ \end{array}\right\}$

(८) $\left\{\begin{array}{l} क = २२४ \\ ग = ७८२ \end{array}\right\} \ldots \left\{\begin{array}{l} आ = ७३^\circ \mid २१' \mid १७'' \\ का = १६^\circ \mid ३८' \mid ४३'' \\ अ = ७४६\cdot२३५२ \end{array}\right\}$

(९) $\left\{\begin{array}{l} अ = २० \\ क = ९९ \end{array}\right\} \ldots \left\{\begin{array}{l} आ = ११^\circ \mid २५' \mid १६\cdot३'' \\ का = ७८^\circ \mid ३४' \mid ४३\cdot७'' \\ ग = १०१ \end{array}\right\}$

(१०) $\left\{\begin{array}{l} अ = १६ \\ क = ११\cdot५२९ \end{array}\right\} \ldots \left\{\begin{array}{l} आ = ५४^\circ \mid १३' \mid २९\cdot६'' \\ का = ३५^\circ \mid ४६' \mid ३०\cdot४'' \\ ग = १९\cdot७२१ \end{array}\right\}$

अजात्यत्र्यस्रगणितम् ।

प्रक्र० ५६ । अजात्यत्र्यस्रे त्रिष्ववयवेषु ज्ञातेषु शेषावयवा ज्ञायन्ते तदल्पेषु ज्ञातेषु त्रिष्वपि कोणेषु ज्ञातेषु वा शेषावयवज्ञानं न भवति ।

अजात्य त्र्यस्रगणितस्यानेके प्रकारा भवन्ति ते उच्यन्ते ।

प्रथमः प्रकारः, यदा त्र्यस्रे एकोभुजः (अ) कोणद्वयं च (आ, का) ज्ञातं भवति ।

तदा $\because$ अ + का + गा = १८०° $\therefore$ गा = १८०° − (आ + का)

एवं तृतीयकोणो ज्ञायते ।

अथ च (३६) प्रक्रमतः $\frac{\text{ज्या आ}}{\text{ज्या का}} = \frac{\text{अ}}{\text{क}}$

$\therefore$ क = $\frac{\text{अ. ज्या का}}{\text{ज्या आ}}$ अस्य घातप्रमापक रूपम्

$घा_{द}\ क = घा_{द}\ अ + घा_{द}\ ज्या\ का - घा_{द}\ ज्या\ आ$

साजात्यात् $घा_{द}\ ग = घा_{द}\ अ + घा_{द}\ ज्या\ गा - घा_{द}\ ज्या\ आ$

एवं शेषभुजौ (क, ग) ज्ञायेते ।

उद० (१) अ = १५, आ = ६७° । २२' । ४८.५''. का = ५३° । ७' । ४८.४''

शेषावयवाः के इति प्रश्नः ।

अत्र गा = १८०° — (६७° । २२′ । ४८.५″ + ५३° । ७′ । ४८.४″)

= १८० — १२०° । ३०′ । ३६.९″ = ५९° । २९′ । २३.१″

घा$_{द}$क = घा$_{द}$ अ + घा$_{द}$ ज्या का — घा$_{द}$ ज्या आ

= १.१७६०९१३ + ९.९०३०९०० — ९.९६५२३७९

= { + ११.०७९१८१३
  − ९.९६५२३७९

= १.११३९४३४ = घा$_{द}$१३ ∴ क = १३

घा$_{द}$ग = घा$_{द}$अ + घा$_{द}$ज्या गा — घा$_{द}$ ज्या आ

= १.१७६०९१३ + ९.९३५२७४६ — ९.९६५२३७९

= { + ११.१११३६५९
  − ९.९६५२३७९

= १.१४६१२८० = घा$_{द}$१४ ∴ ग = १४

एवं सिद्धाः शेषावयवाः { गा = ५९° । २९′ । २३.१″
  क = १३, ग = १४ ।

उदा० (२) अ = १०, का = १२६° । ५२′ । ११.६″ गा = २५° । ३′ । २७.४″

शेषावयवाः के इति प्रश्नः ।

अत्र आ = १८०° — (१२६° । ५२′ । ११.६″ + २५° । ३′ । २७.४″)

= १८०° — (१५१° । ५५′ । ३९″) = २८° । ४′ । २१″ ततः

घा$_{द}$क = घा$_{द}$अ + घा$_{द}$ ज्याका — घा$_{द}$ ज्या आ

= १.००००००० + ९.९०३०९०० — ९.६७२६४११

= { + १०.९०३०९००
  − ९.६७२६४११

= १.२३०४४८९ = घा$_{द}$१७ ∴ क = १७,

एवं घा$_{द}$ग = घा$_{द}$अ + घा$_{द}$ ज्या गा — घा$_{द}$ ज्या आ

= १.००००००० + ९.६२६८८३६ — ९.६७२६४११

$$= \begin{cases} +१०\cdot६२६८८३६ \\ -\ \ ९\cdot६७२६४११ \end{cases}$$

$$= \quad ०\cdot९५४२४२५ \quad = \text{घा}_{\text{द}}९ \ \therefore \text{ग} = ९$$

एवं सिद्धाः शेषावयवाः $\begin{cases} \text{आ} = २८^{\circ} \mid ४' \mid २१'' \\ \text{क} = १७,\ \text{ग} = ९ \mid \end{cases}$

द्वितीयः प्रकारः, यदात्र्यस्रे भुजौ (अ, क) तयोरन्यतरस्य सम्मुखकोणश्च (आ) ज्ञातं भवति तदा (३७) प्रक्रमतः

$$\frac{\text{ज्या आ}}{\text{ज्या का}} = \frac{\text{अ}}{\text{क}}$$

$$\therefore \text{ज्या का} = \frac{\text{क. ज्या आ}}{\text{अ}}$$

ततः गा = १८०° −(आ + का) एवं शेषकोणौ ज्ञेयौ ।

$$\text{अथ} \because \frac{\text{ज्या आ}}{\text{ज्या गा}} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}}$$

$$\therefore \text{ग} = \frac{\text{अ. ज्या गा}}{\text{ज्या आ}}$$

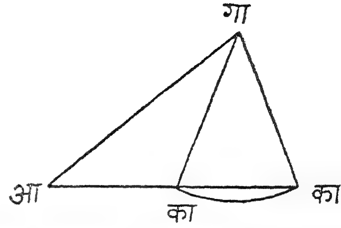
अथ (का), (ग) अनयोर्मानयोर्घातप्रमापकरूपे

$$\text{घा}_{\text{द}}\text{ज्या का} = \text{घा}_{\text{द}}\text{ ज्या आ} + \text{घा}_{\text{द}}\text{क} - \text{घा}_{\text{द}}\text{अ}$$

$$\text{घा}_{\text{द}}\text{ग} = \text{घा}_{\text{द}}\text{ज्या गा} + \text{घा}_{\text{द}}\text{अ} - \text{घा}_{\text{द}}\text{ज्या आ} \mid$$

अत्रेदमवधेयम्, कोणस्य तद्धीनसमकोणद्वयस्य च ज्यायास्तुल्यत्वादत्र (ज्या का) तो लब्धं (का) मानं साशीतिशताच्छुद्धं (का) कोणस्य द्वितीयमानं भवति। परं यदि (क) भुजात् (अ) भुजो लघुः स्यात्। अन्यथा नेति। यतः (क) भुजात् (अ) भुजस्याल्पत्वे (क) कोणात् (आ) कोणोऽल्पः स्यात्। ततःपूर्वसाधितयोः (का) कोणमानयोर्योगस्य समकोणद्वयतुल्यत्वात् तन्मानयोरेकैकस्य (का) कोणादल्पेन (आ) कोणेन युतस्य समकोणद्वयाल्पत्वादत्र (का) कोणमानद्वयसम्भवः। परन्तु (क) भुजात् (अ) भुजस्याधिकत्वे (का) कोणात् (अ) कोणोऽधिकः स्यात्। अतस्तेन युतस्य (का) कोणद्वितीयमानस्य समकोणद्वयाधिकत्वादत्र द्वितीयमानासम्भवः।

इदं पार्श्ववर्ति क्षेत्रस्थितेः सम्यगवगम्यते ।



कल्प्यतां, (आ का गा) त्रिभुजे (आ गा) भुजात् (का गा) भुजोऽल्प इति। तदा (गा) केन्द्रं कृत्वा (गा का) व्यासार्द्धेन (का का) चापे कृते स (आ का) रेखायां (आ) बिन्दोः (का) दिश्येव द्वितीयस्थाने लगति। तथा च उद्दिष्टावयवविशिष्टं त्रिभुजद्वय सम्पद्यते। तत्र (का) कोणस्य द्वे माने अन्योऽन्यस्पर्द्धिनी स्पष्टं दृश्येते।

अथ यदि (आ गा) भुजात् (का गा) भुजो महान् स्यात् तदा (आ) बिन्दोर्यस्यां दिशि (का) बिन्दुर्वर्तते तदन्यदिशि (का का) चापस्य (आ का) रेखया द्वितीयसम्पातः स्यात्। तथा च द्वितीयत्र्यस्रस्यासम्भवात् (का) कोणद्वितीयमानासम्भवः।

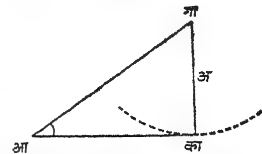
अथ च यदि (का का) चापः (आ का) रेखां स्पृशेदेव तदा (आ गा) भुजात् (का गा) भुजस्याल्पत्वेऽपि (का) कोण एकविध एव भवेत्।

यदि च (का का) चापः (आ का) रेखां न स्पृशेन्न वा छिन्द्यात् तदा (आ का गा) त्रिभुजासम्भवात् तदुद्दिष्टं खिलं* ज्ञेयम्।

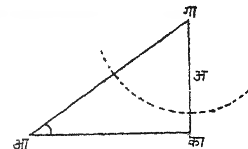
---

* अस्याशयोविशदीक्रियते। पार्श्वस्थं क्षेत्रं द्रष्टव्यम्।

(१) यतोहि ज्या का : क : : ज्या आ : अ, अतः ज्या का $= \frac{\text{क} \times \text{ज्या आ}}{\text{अ}}$,



यद्यत्र अ = क × ज्या आ, एवं स्यात्तदा ज्या का = १ = ज्या ९०°, अस्यां स्थितौ का कोणस्य ९०° अंशमितत्वेन प्रतिज्ञोद्देश्यानुरूपमेकविधमेव जात्यत्र्यस्रं निष्पद्यते, यत्र अ भुजः का गा लम्ब तुल्यस्तथा अ भुजमितत्रिज्यया कृतं वृत्तं आ का रेखायां स्पर्शमात्रं करोति। अतोऽत्र का कोणस्यैकविधमेव मानं भवति।



(२) यदि च का गा लम्बात् अ भुजः स्वल्पो भवेत्तदा अ भुजमितत्रिज्याकृतवृत्तं आ का रेखां न स्पृशेदिति पार्श्ववर्ति क्षेत्रतः स्फुटं भवति। अतः आ का गा त्रिभुजस्यासंभवः। तेनात्र का कोणमानाऽसम्भवः।

उदा० (१) अ = १०, क = १७, आ = २८° । ४' । २१"

तदा शेषावयवाः किंप्रमाणा इति प्रश्नः ।

अत्र घा$_{द}$ज्या का = घा$_{द}$ ज्या आ + घा$_{द}$क − घा$_{द}$अ

= ९·६७२६४११ + १·२३०४४८९ − १·००००००००

= ९·९०३०९०० = घा$_{द}$ज्या ५३° । ७' । ४८·४"

वा = घा$_{द}$ज्या १२६° । ५२' । ११·६"

अत्र (क) भुजात् (अ) भुजोऽल्पो भवति

अतः का = ५३° । ७' । ४८·४" वा १२६° । ५२' । ११·६"

एवमिह (का) मानं द्विविधं भवति

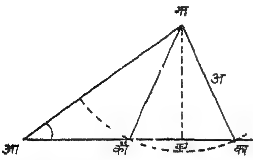
∴ गा = ९८° । ४७' । ५०·६" वा २५° । ३' । २७"·४ ।

अथ च घा$_{द}$ग = घा$_{द}$ज्या गा + घा$_{द}$अ − घा$_{द}$ज्या आ

= घा$_{द}$ज्या (९८° । ४७' । ५०·६") + घा$_{द}$अ − घा$_{द}$ज्या आ

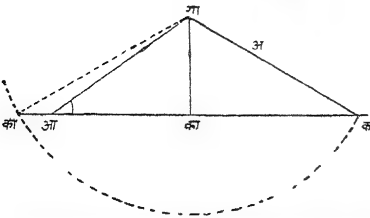
= ९·९९४८६०४ + १·००००००० − ९·६७२६४११

= १·३२२२१९३ = घा$_{द}$२१ ∴ ग = २१ ।



(३) यदि च अ भुजः का' गा अन्तलम्बान्महान् अथ च आ गा भुजतोऽल्पोभवेत्तदा अ भुजमितत्रिज्या कृतंवृत्तं आ का रेखायां आ बिन्दोः का दिश्येव कौ स्थाने स्पृशेत् । एवमुक्तोद्दिष्टावयव विशिष्टं गा का कौ, गा कौ आ इति त्रिभुज द्वयं सम्पद्यते । अत्र का कोणस्य परस्परस्पर्धिनी द्वे माने क्षेत्रे स्फुटं दृश्यते ।

(४) एवं यदि अ भुजः को गा लम्बान्महान् अथ च आ गा भुजतोऽपि महान् भवेत्,



तदा अ भुजमितत्रिज्याकृतवृत्तचापस्यैकः का प्रान्तः आ कोणाद्यस्यां दिशि भवेत्तद्विरुद्ध दिशि तदन्यः कौ प्रान्तः आ का रेखायां भवेदिति पार्श्वस्थ क्षत्रतः स्फुटम् । अथ आ कोणस्य वामभागे यत् आ कौ गा त्रिभुजमुत्पद्यते तत्र आ कोणस्य (१८०°-आ) एतत्परिमितत्वेन प्रतिज्ञोद्देश्यविरुद्धत्वात्तदस्वीकार्यमेव। अस्यां स्थितौ प्रतिज्ञोद्देश्यानुकूलमेकमेव त्रिभुजं संभवति । अतोऽत्र का कोणस्य द्वितीयमानासम्भव इति सर्वं निरवद्यम् ।

यद्वा घा$_{द}$ग = घा$_{द}$ज्या (२५° । ३′ । २७·४″) + घा$_{द}$अ − घा$_{द}$ज्या आ

= ९·६२६८८३६ + १·००००००० — ९·६७२६४११

= ०·९५४२४२५ = घा$_{द}$९ ∴ ग = ९ ।

एवं सिद्धाः शेषावयवाः
{ का = ५३° । ७′ । ४८·४″ वा १२६° । ५२′ । ११·६″
{ गा = ९८° । ४७′ । ५०·६″ वा २५° । ३′ । २७·४″
{ ग = २१, वा ९ ।

उदा० (२) अ = १५, क = १३, आ = ६७° । २२′ । ४८·५″

शेषावयवाः किं प्रमाणा इति प्रश्नः ।

अत्र घा$_{द}$ज्या का = घा$_{द}$ज्या आ + घा$_{द}$क − घा$_{द}$अ

= ९·९६५२३७९ + १·११३९४३४ − १·१७६०९१३

= ९·९०३०९०० = घा$_{द}$ज्या ५३° । ७′ । ४८·४″

∴ का = ५३° । ७′ । ४८·४″ ।

अत्र (क) भुजात् (अ) भुजो महानस्ति । अतोऽत्र (का) मानमेकविधमेव,

∴ गा = ५९° । २९′ । २३·१″ ।

ततः प्राग्वत् ग = १४ ।

(३) तृतीयः प्रकारः । यदा त्रिभुजे भुजौ (क, ग) तयोरन्तर्गत कोणश्च (आ) इति ज्ञातं भवति ।

तदा (३६) प्रक्रमतः $\frac{\text{क}+\text{ग}}{\text{क}-\text{ग}} = \frac{\text{स्प } \frac{१}{२} (\text{का}+\text{गा})}{\text{स्प } \frac{१}{२} (\text{का}-\text{गा})}$

∴ स्प $\frac{१}{२}$ (का − गा) = $\frac{\text{क}-\text{ग}}{\text{क}+\text{ग}}$ × स्प $\frac{१}{२}$ (का + गा)

परन्तु $\frac{१}{२}$ (का + गा) = *९० − $\frac{१}{२}$ आ

∴ स्प $\frac{१}{२}$ (का − गा) = $\frac{\text{क}-\text{ग}}{\text{क}+\text{ग}}$ × को स्प $\frac{१}{२}$ आ ।

---

* १८०° — (का + गा) = आ, ∴ ९०° — $\frac{१}{२}$ (का + गा) = $\frac{१}{२}$ आ, पक्षान्तरनयनेन, $\frac{१}{२}$ (का + गा) = ९०° — $\frac{१}{२}$ आ ।

अस्य घातप्रमापकरूपम्

$$\text{घा}_{\text{द}}\,\text{स्प}\,\tfrac{१}{२}(\text{का}-\text{गा})=\text{घा}_{\text{द}}\,\text{को स्प}\,\tfrac{१}{२}\text{आ}+\text{घा}_{\text{द}}(\text{क}-\text{ग})-\text{घा}_{\text{द}}\,(\text{क}+\text{ग})$$

एवमज्ञातकोणयोरन्तरार्द्धं ज्ञायते तयोर्योगार्द्धन्तु ज्ञातकोणाज्ज्ञातमेवास्ति

$$\therefore\ \text{का}=\tfrac{१}{२}\,(\text{का}+\text{गा})+\tfrac{१}{२}\,(\text{का}-\text{गा})$$

$$\text{गा}=\tfrac{१}{२}\,(\text{का}+\text{गा})-\tfrac{१}{२}\,(\text{का}-\text{गा})$$

एवमज्ञात कोणौ ज्ञायेते ।

ततः प्रथमप्रकारेण तृतीयभुजज्ञानं सुलभम् ।

अथात्र यदि उद्दिष्टावयवैः शेषकोणनिरपेक्षमेव तृतीयभुजज्ञानमिष्टं तदा तत् $\text{अ}^{२}=\text{क}^{२}+\text{ग}^{२}-२\,\text{क ग.कोज्या आ}$ (३८) प्रक्रमोक्तादस्मात् समीकरणाज्जायते। परं नह्यस्य समीकरणस्य घातप्रमापकरूपं सम्पद्यत इतीदं समीकरणं तथा परिणाम्यते यथास्मात् घातप्रमापकद्वारा तृतीयभुजज्ञानं स्यात् सपरिणामो द्विविधः ।

तत्रादावाद्यः प्रदर्श्यते

$$(\text{प}_{१})\ \text{अ}^{२}=\text{क}^{२}+\text{ग}^{२}-२\,\text{क ग-कोज्या आ}$$

$$=\text{क}^{२}-२\,\text{क ग}+\text{ग}^{२}+२\,\text{क ग}\,(१-\text{कोज्या आ})$$

$$=(\text{क}-\text{ग})^{२}+४\,\text{क ग. ज्या}^{२}\,\tfrac{१}{२}\,\text{आ}$$

$$=(\text{क}-\text{ग})^{२}\left\{१+\frac{४\,\text{क ग}}{(\text{क}-\text{ग})}.\,\text{ज्या}^{२}\,\tfrac{१}{२}\,\text{आ}\right\}$$

अत्र $\frac{४\,\text{क ग}}{(\text{क}-\text{ग})^{२}}\cdot\,\text{ज्या}^{२}\,\tfrac{१}{२}$ आ इदं धनमस्ति । अतस्तत्स्थाने ($\text{स्प}^{२}$ इ) कल्प्यते तदा ।

$$\text{अ}^{२}=(\text{क}-\text{ग})^{२}\,(१+\text{स्प}^{२}\,\text{इ})=(\text{क}-\text{ग})^{२}\,\text{छे}^{२}\,\text{इ}$$

$$\therefore\ \text{अ}=(\text{क}-\text{ग})\,\text{छे इ}$$

अस्य घातप्रमापकरूपम्

$$\text{घा}_{\text{द}}\text{अ}=\text{घा}_{\text{द}}\,(\text{क}-\text{ग})+\text{घा}_{\text{द}}\,\text{छे इ}-१०\ ।$$

अथ ∵ $स्प^2 इ = \frac{४ क ग}{(क-ग)^2} \cdot ज्या^2 \frac{१}{२} आ$

$\therefore स्प इ = \frac{२ \sqrt{क ग}}{क-ग} \cdot ज्या \frac{१}{२} आ$ ।

अस्य घातप्रमापकरूपम् ।

$घा_{द} स्प इ = घा_{द} २ + \frac{१}{२} घा_{द} क + \frac{१}{२} घा_{द} ग + घा_{द} ज्या \frac{१}{२} आ - घा_{द}(क-ग)$

एवं (इ) माने ज्ञाते ततः

$घा_{द} अ = घा_{द} (क-ग) + घा_{द} छे इ - १०$ ।

अस्मिन् परिणामे यदि (क - ग) अल्पं स्यात् तथा (स्प इ) महत्स्यात् ततो लब्धं (इ) मानं *स्थूलं स्यात् ततः (क) मानमपि स्थूलं स्यात् ।

* अत्रेदमवधेयम्, अस्मिन् त्रैकोणमितिके गणिते गणितसौकर्याय (इ) कोण सदृश-सहायकोणकल्पनं प्रायिकमेव भवति । तत्रास्मिन्नाद्यपरिणामे यथा यथा भुजान्तरं स्वल्पं भवति तथा (इ) कोणस्पर्शरेखामानं ततो लब्धं (इ) कोणमानं च प्रवर्धते । यथाऽत्र द्वितीयोदाहरणे भुजान्तरे रूपमिते (इ) कोणमानमाद्यपरिणामेन ८६°। १०′ एतन्मितं गणितेन प्रसिध्यति ।

तृतीयोदाहरणे भुजान्तरे २१ मिते (इ) कोणमानं ४६°। ४४′। एतन्मितं प्रसाधितं ग्रन्थे वर्तते । यदि च भुजान्तरं शून्य समं भवेत् तदा (इ) कोण स्पर्शरेखाया आनन्त्यात् (स्प इ) समीकरणतो लब्धस्य (क) भुजमानस्याप्यानन्त्यं स्यात् । अतोऽत्र द्वितीयपरिणामोऽपि प्रदर्शितोऽस्ति ।

अनेन द्वितीयपरिणामेन क, ग भुजयोस्साम्येऽपि अ भुजमानं वास्तवमेवोपलभ्यते । यथा कल्प्यताम्, आ का गा त्रिभुजं, यत्र ∠आ = ७२°, का, गा कोणयोः प्रत्येकस्य मानं ५४°, अ = .६५१, क, ग भुजयोः प्रत्येकस्य मानं = .८०९, स्वाभाविकी $\frac{१}{२}$ आकोणज्या = .५८८ । ततो द्वितीयपरिणामानुसारं, $ज्या इ = \frac{२\sqrt{क ग}}{क+ग} \times कोज्या \frac{१}{२} आ$, उत्थापनेन, $ज्या इ = \frac{२ \times .८०९}{२ \times .८०९} \times कोज्या \frac{१}{२} आ$, $\therefore$ कोज्या इ = ज्या $\frac{१}{२}$ आ । एवं अ = (क + ग) × कोज्या इ, उत्थापनेन, अ = २ × .८०९ × .५८८ = .६५०६ ··· इ० । अत एवंविधस्थले शेषभुजज्ञानार्थं द्वितीय परिणाम आवश्यको भवति ।

अतो द्वितीयपरिणाम उच्यते ।

$(\text{प}_{२})\ \text{अ}^{२} = \text{क}^{२} + \text{ग}^{२} - २\ \text{क ग. कोज्या आ}$

$= \text{क}^{२} + २\ \text{क ग} + \text{ग}^{२} - २\ \text{क ग}\ (१ + \text{कोज्या आ})$

$= (\text{क}+\text{ग})^{२} - ४\ \text{क ग. कोज्या}^{२}\ \tfrac{१}{२}\ \text{आ}$

$= (\text{क}+\text{ग})^{२} \left\{ १ - \frac{४\ \text{क ग}}{(\text{क}+\text{ग})^{२}}\ \text{कोज्या}^{२}\ \tfrac{१}{२}\ \text{आ} \right\}$

अथ यतः $(\text{क}+\text{ग})^{२}$ अस्मात् (४ क ग) इद सदैवाल्पं* भवति अतः

$\left(\frac{४\ \text{क ग}}{(\text{क}+\text{ग})^{२}}\ \text{कोज्या}^{२}\ \tfrac{१}{२}\ \text{आ} \right)$ इदं १ रूपादल्पं स्यात्

$\therefore$ कल्प्यताम् $\frac{४\ \text{क ग}}{(\text{क}+\text{ग})^{२}} \cdot \text{कोज्या}^{२}\ \tfrac{१}{२}\ \text{आ} = \text{ज्या}^{२}\ \text{इ}$

तदा $\text{अ}^{२} = (\text{क}+\text{ग})^{२}\ (१ - \text{ज्या}^{२}\ \text{इ}) = (\text{क}+\text{ग})^{२}.\ \text{को ज्या}^{२}\ \text{इ}$

$\therefore\ \text{अ} = (\text{क}+\text{ग}).\ \text{को ज्या इ}$ ।

अथ ज्या इ, अ, अनयोर्मानयोर्घातप्रमापकरूपे

$\text{घा}_{\text{द}}\ \text{ज्या इ} = \text{घा}_{\text{द}}२ + \tfrac{१}{२}\ \text{घा}_{\text{द}}\text{क} + \tfrac{१}{२}\ \text{घा}_{\text{द}}\text{ग} + \text{घा}_{\text{द}}\ \text{कोज्या}\ \tfrac{१}{२}\ \text{आ}$

$- \text{घा}_{\text{द}}\ (\text{क}+\text{ग})$ ।

$\text{घा}_{\text{द}}\text{अ} = \text{घा}_{\text{द}}\ (\text{क}+\text{ग}) + \text{घा}_{\text{द}}\ \text{कोज्या इ} - १०$ ।

उदा० । क = ८२, ग = २१, आ = १०२° । $४०'$ । $४९\cdot४''$ तदा

शेषावयवाः किं प्रमाणा इति प्रश्नः ।

अत्र $\text{घा}_{\text{द}}\ \text{स्प}\ \tfrac{१}{२}\ (\text{का} - \text{गा})$

$= \text{घा}_{\text{द}}\ \text{कोस्प}\ \tfrac{१}{२}\ \text{आ} + \text{घा}_{\text{द}}\ (\text{क} - \text{ग}) - \text{घा}_{\text{द}}\ (\text{क}+\text{ग})$

$= \text{घा}_{\text{द}}\ \text{कोस्प}\ (५१^{\circ}\ ।\ २०'\ ।\ २४'') + \text{घा}_{\text{द}}६१ - \text{घा}_{\text{द}}१०३$

$= ९\cdot९०३०९०० + १\cdot७८५३२६८ - २\cdot०१२८३७२$

---

* यथा, $(\text{क}+\text{ग})^{२} - ४\ \text{क ग} = (\text{क}-\text{ग})^{२}$

अथवा $(\text{क}+\text{ग} - २\sqrt{\text{क ग}})\ (\text{क}+\text{ग} + २\sqrt{\text{क ग}} = (\text{क}-\text{ग})^{२}$,

अत्र प्रथमकोष्ठस्थपदपर्यालोचनेन $(\text{क}+\text{ग}) > २\sqrt{\text{क ग}}$ इत्यवगम्यते,

(क — ग) अस्य धनगतत्वात् । अतः $(\text{क}+\text{ग})^{२} > ४$ क ग ।

$= \begin{cases} + ११·६८८४१६८ \\ - \ \ २·०१२८३७२ \end{cases}$

$= +$ ९·६७५५८२६ = स्प २५° । २१′ । ३·५″ ।

$\therefore \frac{१}{२}$ (का—गा) = २५° । २१′ । ३·५″ ।

अथ च $\frac{१}{२}$ (का + गा) = ९० — $\frac{१}{२}$ आ = ३८° । ३९′ । ३५·३″

$\therefore$ का = ६४° । ०′ । ३८·८″

गा = १३° । १८′ । ३१·८″ ।

अतः प्रथमप्रकारेण सिद्धस्तृतीयभुजः अ = ८९ ।

अथाद्यपरिणामतस्तृतीयभुजज्ञानार्थं न्यासः ।

$\text{घा}_{\text{द}}$ स्प इ = $\text{घा}_{\text{द}}$२ + $\frac{१}{२}$ $\text{घा}_{\text{द}}$क + $\frac{१}{२}$ $\text{घा}_{\text{द}}$ग

+ $\text{घा}_{\text{द}}$ ज्या $\frac{१}{२}$ आ — $\text{घा}_{\text{द}}$ (क—ग)

= ·३०१०३०० + ·६६११०९६५ + ·९५६९०६९५ +

९·८९२५७८१ — १·७८५३२९८

= ११·८११६२४७ — १ ७८५३२९८ = १०·०२६२९४९

= स्प ४६° । ४४′ । ४७″ $\therefore$ इ = ४६° । ४४′ । ४७″ ।

अथ $\text{घा}_{\text{द}}$अ = $\text{घा}_{\text{द}}$ (क — ग) + $\text{घा}_{\text{द}}$छे इ — १०

= १·७८५३२९८ + १०·१६४०६०२ — १०

= १·९४९ ३९०० = $\text{घा}_{\text{द}}$८९ $\therefore$ अ = ८९

सिद्धस्तृतीयभुजः स एव ।

एवं द्वितीयपरिणामतोऽपि स एव भुजो लभ्यते ।

चतुर्थः प्रकारः । यदा त्रिभुजस्य त्रयोभुजाः (अ, क, ग) ज्ञाता भवन्ति तदा एक कोण (आ) ज्ञानमधोलिखिताभिरुन्मितिभिः प्रत्येकं जायते ।

$$\text{ज्या आ} = \frac{२}{\text{क ग}}\sqrt{\text{स (स—अ) (स—क) (स—ग)}} \qquad (१)$$

$$\text{ज्या } \frac{१}{२} \text{ आ} = \sqrt{\frac{\text{(स—क) (स—ग)}}{\text{क ग}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (२)$$

$$\text{को ज्या } \tfrac{१}{२} \text{ आ} = \sqrt{\frac{\text{स (स—अ)}}{\text{क ग}}} \qquad \cdots\cdots (३)$$

$$\text{स्प } \tfrac{१}{२} \text{ आ} = \sqrt{\frac{\text{(स—क) (स—ग)}}{\text{स (स—अ)}}} \qquad \cdots\cdots (४)$$

अत्र प्रथमोन्मितेरुपपत्तिः (३६) प्रक्रमे द्रष्टव्या द्वितीयादीनां च (४०) प्रक्रमे विलोक्या।

अयं यदा* (आ) कोणः समकोणासन्नो न स्यात्तदा प्रथमोन्मितेस्तदानयनं कर्तुं युज्यते यतः समकोणासन्नकोणज्याया धनुः सारणीतः सूक्ष्मं न लभ्यते।

यदा (आ) कोणः समकोणासन्नः स्यात्तदा द्वितीयतृतीयोन्मितिभ्यां प्रत्येकं तदानयनं कर्तुं युज्यते।

यदा (आ) कोणः समकोणद्वयासन्नोनस्यात्तदा चतुर्थोन्मिते स्तदानयनं कर्तुं युज्यते।

अथासामुन्मितीनां क्रमेण घातप्रमापकरूपाणि

$$(१)\ \text{घा}_{\text{द}}\ \text{ज्याआ} = १० + \text{घा}_{\text{द}} २ + \tfrac{१}{२} \{ \text{घा}_{\text{द}}\ \text{स} + \text{घा}_{\text{द}}\ (\text{स—अ}) + \text{घा}_{\text{द}}\ (\text{स—क}) + \text{घा}_{\text{द}}\ (\text{स—ग}) \} - (\text{घा}_{\text{द}}\ \text{क} + \text{घा}_{\text{द}}\ \text{ग})\ ।$$

$$(२)\ \text{घा}_{\text{द}} \text{ज्या } \tfrac{१}{२} \text{ आ} = \tfrac{१}{२} \{ २० + {}^{\dagger}\text{घा}_{\text{द}}\ (\text{स—क}) + \text{घा}_{\text{द}}\ (\text{स—ग}) - (\text{घा}_{\text{द}} \text{क} + \text{घा}_{\text{द}} \text{ग}) \}\ ।$$

---

* अत्रेदमवधेयम्, यतो हि ३९ प्रक्रमे ज्या आ मानं कोटिज्या आ तः प्रसाधितमस्ति, अतः आकोणस्य समकोणासन्नत्वे तत्कोटिज्यास्पर्शरेखापूर्वापरान्तयोः पृथुत्वादनुपातेन पूर्वापरान्तरद्वारा प्रसाधिते आकोण कोटिज्यास्पर्शरेखाधनुषी स्थूले भवतः, इतिहेतोः प्रथमोन्मितेः आकोणमानानयनं कर्तुं न युक्तम्। समकोणासन्नकोणार्धस्य समकोणासन्नत्वाभावात् द्वितीय तृतीयोन्मितिभ्यां प्रत्येकं समकोणासन्नकोणमानानयनं कर्तुं युज्यते। एवं समकोणद्वयासन्नकोणार्द्धस्य समकोणासन्नत्वात् पूर्वोक्तकारणेन चतुर्थोन्मित्या तदानयनं कर्तुं न युज्यते।

† अत्र करणीगतवर्गराशेस्त्रिज्यागुणकोऽस्ति। वर्गेण वर्गं गुणयेदितिनियमेन च स त्रिज्यावर्गेण गुणनीयो भवति। अत्र त्रिज्या $= १०^{१०}$, अस्य घातमापकः $= १०$, अयं द्विगुणः २० अयं जातस्त्रिज्यावर्गः। एव करणीगतघातमापकपदसंहतेर्वर्गमूलमपेक्षितं, अतः $\tfrac{१}{२}$ अयं तद्गुणकः कल्पितोऽस्ति। अत्र परिशिष्टोक्त घातमापकनियमा द्रष्टव्याः।

(३) घा$_{\text{द}}$कोज्या $\frac{\text{१}}{\text{२}}$ आ

= $\frac{\text{१}}{\text{२}}$ { २० + घा$_{\text{द}}$स + घा$_{\text{द}}$(स − अ) − (घा$_{\text{द}}$क + घा$_{\text{द}}$ग) } ।

(४) घा$_{\text{द}}$स्प $\frac{\text{१}}{\text{२}}$ आ =

$\frac{\text{१}}{\text{२}}$ {२० + घा$_{\text{द}}$(स − क) + घा$_{\text{द}}$(स − ग) − घा$_{\text{द}}$स − घा$_{\text{द}}$(स − अ)} ।

साजात्यात् का, गा कोणयोरपि माने एवं ज्ञातुं शक्ये ।

उदा० । यत्र त्रिभुजे अ = २५, क = १७ ग = २८,

तत्र त्रयः कोणाः किं प्रमाणा इति प्रश्नः ।

अत्र प्रथमोन्मित्या उत्तरावगमाय न्यासः ।

स = $\frac{\text{१}}{\text{२}}$ (२५ + १७ + २८) = ३५ ।

∴ स − अ = १० ।

स − क = १८ ।

स − ग = ७ ।

अथ च

घा$_{\text{द}}$ज्याआ = १० + घा$_{\text{द}}$२ + $\frac{\text{१}}{\text{२}}$ { घा$_{\text{द}}$स + घा$_{\text{द}}$ (स − अ) +

घा$_{\text{द}}$ (स − क) + घा$_{\text{द}}$ (स − ग) − (घा$_{\text{द}}$क + घा$_{\text{द}}$ग) }

= १० + ·३०१०३००

+ $\frac{\text{१}}{\text{२}}$ { १·५४४०६८० + १·०००००००+ १·२५५२७२५ + ·८४५०९८० }

− (१·२३०४४८९ + १·४४७१५८०)

= १०·३०१०३०० + २·३२२२१९३ − २·६७७६०६९

= ९·९४५६४२४ = घा$_{\text{द}}$ज्या (६१° । ५५' । ३९'')

∴ आ = ६१° । ५५' । ३९''

ततः प्रथमप्रकारेण सिद्धम् का = ३६° । ५२' । ११·६५''

∴ गा = ८१° । १२' । ९·३५'' ।

अभ्यासार्थमुदाहरणानि

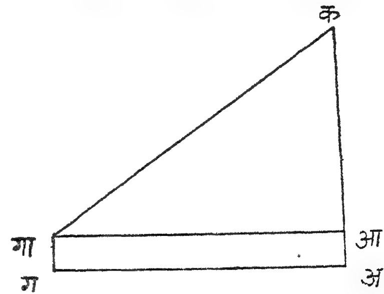
	उद्दिष्टावयवाः	शेषावयवाः
(१)	अ = ५०० आ = [illegible]५° । ४७′ का = ५७° । २५′	गा = ३६° । ४८′ क = ४२२·४४८१ ग = ३००·३२४७
(२)	अ = ३२७ का = २६° । ८′ । ५५″ गा = २३° । ३२′ । ५″	आ = १३०° । १६′ क = १२६ क = १७१·२४७३
(३)	अ = ८५ क = १०० आ = ३७° । २६′	का = ४५° । ४३′ । ६६″ वा = १३४° । १६′ । ५३·४″ गा = ६६° । ४७′ । ५३′·४″ वा = ८° । १४′ । ६·६″ ग = १३८·६६८७ वा = २०·००७३६
(४)	अ = ८५ क = २०२ आ = ११° । २५′ । १६″	का = २८° । ४′ । २१″ वा = १५१° । ५५′ । ३६″ गा = १४०° । ३०′ । २३″ वा = १६° । ३६′ । ५″ ग = २७३ वा = १२३
(५)	अ = ८६ क = ६५ आ = ३६° । ५२′ । ११·६″	का = २५° । ५६′ । २१″·७५ गा = ११७° । ८′ । २७″ १५ ग = १३२
(६)	क = १२५ ग = १५० आ = ३०°	का = ५५° । १०′ । २″ गा = ६४° । ४९′ । ५८″ = ७६·१४३
(७)	अ = [illegible]३ क = २० गा = ७५° । ४५′	आ = ३६° । ५२′ । १२″ का = ६७° । २२ । ४८″ ग = २१

(८)	अ = १००	...	आ = ५९° । १' । २०''
	क = १०१		का = ५९° । ५९' । २५''
	ग = १०२		गा = ६०° । ५९' । १५''
(९)	अ = ३७	...	आ = ५३° । ७' । ४८·३''
	क = १५		का = १८° । ५५' । २८·७''
	ग = ४४		गा = १०७°, ५६', ४३''
(१०)	अ = ३४२०२०१	...	आ = २०°
	क = ८६६०२५४		का = ६०°
	ग = ९८४८०७८		गा = १००°

प्रक्र० ५७। अजात्यत्र्यस्रस्य शेषावयवाः जात्यत्र्यस्रगणितेनापि ज्ञातु शक्यन्ते किन्तु तत्र इष्टकोणात्तत्सम्मुखभुजे लम्बं निपात्य द्वेत्र्यस्रे उत्पादनीये भवत इति विशेषः।

प्रक्र० ५८। अथ त्रिकोणमितेर्यथा वंशगृहपर्वतादीनामौच्यस्य तत्स्वान्तरस्य चावगमः स्यात्तथोच्यते। तदर्थमादौ कस्यचित्सरलप्रदेशस्य दैर्घ्यं कत्तिपयकोणानां च मानं चावश्यमवगम्यं भवति। तत्र प्रदेशदैर्घ्यन्तु रज्ज्वा सरलयष्ट्या वा मापयन्ति कोणांश्च तुरीयषष्ठादियंत्रैर्मापयन्ति।

उदा० (१) यदि कस्यचित् (अ क) सरलवंशस्पौच्च्यं ज्ञातव्यं तदा (अ) स्थानात् समानभूमौ सरलयष्ट्या (अ ग) प्रदेशं मापयित्वा (ग) स्थानात् (क) वंशाग्रस्योन्नतिं तुरीयेण षष्ठेन वा वेधयेत् तदा यदि (अ ग) दैर्घ्यं (अ) तुल्यं स्यात् (क) अस्य उन्नतिश्च (कं) स्यात् तथा (ग गा) दृष्ट्युच्छ्रितिश्च (ग) स्यात् तदा



(प्रक्र० ५५ प्रका० २) आक = आगा. स्प ∠ आ गा क
= अग. स्प ∠ आ गा क
= अ. स्प क

∴ (अ क) औच्च्यम् = अ. स्प क + ग एव मौच्च्यं ज्ञातं भवति

एवं दृक् समसूत्रादुच्चतर वस्तुनो गणितागतमौच्यमानं दृष्ट्युच्छ्रायेणाधिकं वास्तवं भवतीति ज्ञेयम् । अथ दृक्समसूत्रादधस्तनवस्तुनो गणितागतं मानं दृष्ट्युच्छ्रायेण विश्लेषितं वास्तवं भवतीत्यपि बोध्यम् ।

यदि अत्र अ = २५ हस्ताः, क° = ३०°, ग = ३½ हस्ताः

$$\text{तदा आ क} = \text{२५} \times \text{स्प ३०}^\circ$$

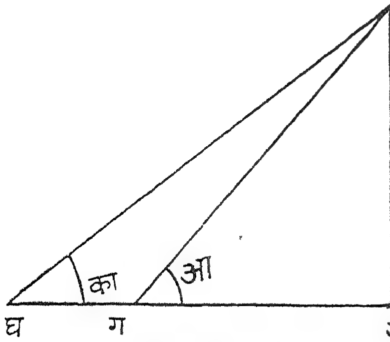
$$\text{वा} \quad \text{घा}_{\text{द}}\text{आ क} = \text{घा}_{\text{द}}\text{२५} + \text{घा}_{\text{द}}\text{ स्प ३०}^\circ - \text{१०}$$

$$= \text{१·३९७९४००} + \text{९·७६१४३९४} - \text{१०}$$

$$= \text{१·१५९३७९४} = \text{घा}_{\text{द}}\text{१४·४३३७६}$$

∴ वंशोच्यम् = १४·४३३७६ + ३.५ = १७·९३३७६ हस्ताः ।

उदा॰ (२) समानभूमौ वर्तमानस्य कस्यचित्प्रासादस्यौच्यं (अ क), दूरत्वं (अ ग) चावगम्यम् ।



अथ कल्प्यताम् (ग) स्थानात् (क) अग्रवेधे लब्धा अंशाः (आ) । ततः (अ) मूलाद्यस्यां दिशि (ग) स्थानं वर्तते तस्यामेवदिशि (ग) स्थानात् (घ) स्थान-पर्यन्तं (अ) हस्तमितदेशं गत्वा (घ) स्थानात् पुनः (क) अग्रवेधे लब्धा अंशाः (का) इति ।

अथ यदि औच्यं (अ क) = य, दूरत्वं (अ ग) = र

$$\text{तदा (२६ प्रक्र.)} \frac{\text{क ग}}{\text{ग घ}} = \frac{\text{ज्या क घ ग}}{\text{ज्या ग क घ}} = \frac{\text{ज्या का)}}{\text{ज्या (आ—का)}}$$

$$\therefore \text{क ग} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्या का}}{\text{ज्या (आ — का)}}$$

$$\therefore \text{य} = {}^{*}\text{ कग.ज्या आ} = \frac{\text{अ.ज्या आ.ज्याका}}{\text{ज्या (आ—का)}} \text{ ।}$$

---

* अ क ग त्रिभुजे, १ : कग : : ज्या आ : य,

∴ य = कग.ज्या आ, इति ज्ञेयम् । एवमेवाग्रे र, अस्योन्मितिर्ज्ञेया ।

$$\text{अथ च र} = \text{कग. कोज्या आ} = \frac{\text{अ.कोज्या आ.ज्या का}}{\text{ज्या (आ} - \text{का)}}$$

अनयोः क्रमेण घातप्रमापकरूपे

$$\text{घा}_{\text{द}}\text{य} = \text{घ}_{\text{द}}\text{अ} + \text{घा}_{\text{द}}\text{ज्या आ} + \text{घा}_{\text{द}}\text{ज्या का} - \text{घा}_{\text{द}}\text{ज्या (आ—का)} - \text{१०}$$

$$\text{धा}_{\text{द}}\text{र} = \text{धा}_{\text{द}}\text{अ} + \text{घा}_{\text{द}}\text{ कोज्या आ} + \text{धा}_{\text{द}}\text{ज्या का} - \text{धा}_{\text{द}}\text{ज्या (अ—का)} - \text{१०}$$

यदीह अ = ५०, आ = ३०° । २५′, का = १९° । ३५′

तदोत्थापनेन सिद्धमौच्यमानम् य = ४५·१४३ हस्ताः ।

तथा (ग) स्थानात् दूरत्वम् र = ७६·८६३ हस्ताः ।

उदा० (३) कस्याश्चित् (अ ग घ) क्रमनिम्नोर्व्या भूपृष्ठे प्रावण्यं (अ घ च) किल (आ) अंशाः । अ थ च अ घ भूम्यां वर्तमानस्य (अ क) गृहादेरौच्य दूरत्वावगमाय तद्भूस्थेनैव द्रष्ट्रा (ग) स्थानात् (क) अग्रवेधे कृते लब्धाः किलोन्नतांशाः ∠क ग छ = (का), ततः (अ ग) दिश्येव (ग) स्थानात् (अ) हस्तमितदेशं गत्वा पुनः (क) अग्रवेधे कृते लब्धाः किलांशाः ∠क घ च = (गा), तथा च यदि औच्यम् (अ क) = य, दूरत्वम् (अ ग) = र, तदा

$$\text{य} = \frac{\text{कग. ज्या अ ग क}}{\text{ज्या क अ घ}} = \frac{\text{कग.ज्या (का—आ)}}{\text{को ज्या आ}}\dagger$$

† प्रस्तुतक्षेत्रे ग छ रेखोपरि क अ ज लम्बनिपातनेन ग अ ज कोणज्या आकोण—कोटिज्यया तुल्या भवति, अ घ च, अ ग ज को ण यो स्तुल्यत्वात् । एवं ग अ ज कोणज्या क अ ध कोणज्यया तुल्या, अतः ज्या क अघ = कोज्या आ, इति सिध्यति । एवमेव घ च रेखोपरि क अ झ लम्बनिपातनेन ज्या क अघ = कोज्या आ, इतिज्ञेयम् । तथैवात्र गा = आ + क घ अ, का = आ + अ ग क = आ + क घ अ + ग क घ, ∴ का − गा = ग क ध एवं भवति । तथा कोज्या का = ज्या ∠ अ क ग । ततोऽग्रेस्फुटम् ॥

परन्तु कग $=\dfrac{\text{गघ.ज्या क घ ग}}{\text{ज्या ग क घ}}=\dfrac{\text{अ.ज्या (गा − आ)}}{\text{ज्या (का — गा)}}$

$\therefore$ य $=\dfrac{\text{अ.ज्या (फा − आ).ज्या (गा — आ)}}{\text{कोज्या आ. ज्या (का — गा)}}$

एवं र $=\dfrac{\text{कग. ज्या अ क ग}}{\text{ज्या क अ ग}}=\dfrac{\text{अ. ज्या (गा — आ). कोज्या का}}{\text{ज्या (का − गा). कोज्या आ}}$

अनयोः क्रमेण घातप्रमापकरूपे ।

घा$_{\text{द}}$य = घा$_{\text{द}}$अ + घा$_{\text{द}}$ज्या (का − आ) + घा$_{\text{द}}$ज्या (गा—आ)

− घा$_{\text{द}}$ कोज्या आ − घा$_{\text{द}}$ज्या (का—गा) ।

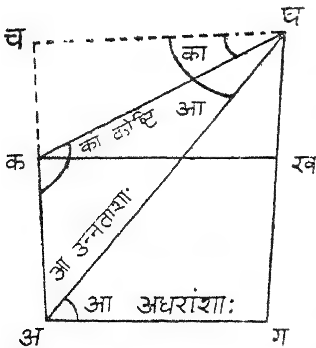
घा$_{\text{द}}$र = घा$_{\text{द}}$अ + घा$_{\text{द}}$ज्या (गा − आ) + घा$_{\text{द}}$ कोज्या का

—घा$_{\text{द}}$ज्या (का—गा) — घा$_{\text{द}}$ कोज्या आ ।

अद्यत्र अ = ५० हस्ताः, आ = ३०°, का = ६२° । ३०′, गा = ५०° । १५′

तदोत्थापनेन सिद्धमौच्च्यमानम् य = ५०.६०३ ।

एवं (ग) दूरत्वमानम् र = ४३.४८८ ।



उदा० (४) समभूस्थमवगतौच्च्यमल्पपर्वतमारुह्य भूस्थसरलवंशस्याग्रमूलयोः प्रत्येकं दृक्समसूत्रादधरांशान् विध्वा तद्वंशस्यौच्च्यमानं ज्ञातव्यम् । यथात्र किल (ग घ) पर्वतौच्च्यम् = उ, (घ) स्थानात् (अ क) वंशस्य मूलाग्रवेधे लब्धे क्रमेणाधरांश* माने = आ, का, अ क वंशौच्च्यम् = य

* इदमत्रावधेयम्, यदा दृष्टिस्थानाद्वेध्यस्थानमूर्ध्वस्थितं भवति तदा वेध्योन्नतांशा निर्दिश्यन्ते । यदा च दृष्टिस्थानाद्वेध्यस्थानमधः स्थितं भवति तदा वेध्याधरांशाः प्रश्ने निर्दिश्यन्ते । प्रस्तुतोदाहरणस्य क्षेत्रे घ = गघपर्वतशिखरम्, अग = भूतलम्, अ = अक भूस्थवंशमूलम्, क = वंशाग्रम्, अग भूतलसमानान्तरे वंशाग्रतः पर्वतशिखरतश्चकृते क्रमेण कख, घच रेखे, च बिन्दुतः कृता गघ समानान्तरा अच रेखा अतः अच = गघ = पर्वतौच्च्यम् । अत्र

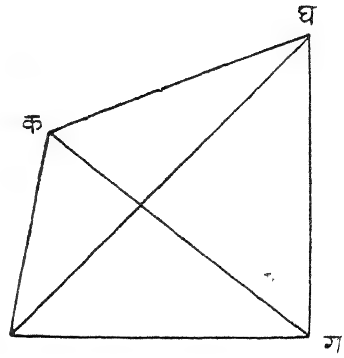
$$\text{तदा}\ \frac{\text{अ घ}}{\text{ग घ}} = \frac{१}{\text{ज्या घ अ ग}} = \frac{१}{\text{ज्या आ}} \quad \therefore \text{अ घ} = \frac{\text{उ}}{\text{ज्या आ}}\ ।$$

$$\text{अथ च}\ \frac{\text{अ क}}{\text{अ घ}} = \frac{\text{ज्या अ घ क}}{\text{ज्या अ क घ}} = \frac{\text{ज्या (आ–का)}}{\text{कोज्या का}}।$$

$$\therefore \text{य} = \frac{\text{उ.ज्या(आ–का)}}{\text{ज्या आ. कोज्या का}}$$

अस्य घातप्रमापकरूपदानं सुगमतरम् ।

उदा० (५) अज्ञातौच्च्याल्पपर्वत-शिखरमारुह्य समभूस्थितयोरवगतान्तरयोर्वृक्षमूलयोः प्रत्येकं दृक्समसूत्रादधरांशमाने द्रष्टुर्वृक्षमूलपर्यन्तयोर्दृक्सूत्रयोरन्तर्गतकोणं चावगम्य तत्पर्वतौच्च्यं कथमवगम्यमिति प्रश्नः ।



यथा किलात्र अ, क वृक्षमूलयोरन्तरं अ क= अ, (ग घ) पर्वतस्य (घ)

अस्थानात् घ स्थाने विद्धे घ अ च कोणः अ च धरातलात् घ स्थानस्यौन्नत्यं सूचयतीति घ अ च उन्नतांशकोणः कथ्यते । एवं घ स्थानात् अस्थाने विद्धे अ घ च कोणः घ स्थानात् अ स्थानस्य प्रावण्यं सूचयतीति अ घ च कोणोऽधरांशकोणः कथ्यते । कोणोऽयं पूर्वोक्तोन्नतांशकोणस्य कोटिरूपो भवतीत्यधरांशकोण उन्नतांशकोणस्य कोटिरूप उन्नतांशकोणश्चाधरांशकोणस्य कोटिरूपो भवतीत्यवगम्यते । अथ प्रकृते अ च धरातले अ स्थानात् घ स्थाने विद्धे घ अ च=आ उन्नतांशास्तत्कोटिः अ घ च=घ अ ग=आ अधरांशाः प्रश्ने निर्दिष्टाः सन्ति । एवं घ स्थानात् क स्थाने विद्धे क घ च=का अधरांशाः प्रश्ने निर्दिष्टाः सन्ति । अतः घ क च किंवा अ क घ=का कोटिरित्येतदग्रे प्रस्तुतप्रश्नोत्तरक्रियायां निर्दिष्टमस्ति तथैव तत्र आ – का=कोण अ घ क इत्यपि निर्दिष्टमस्ति ततोऽग्रेस्फुटम् । एवमेव वेध्यस्थानं स्थिरं कृत्वा यथा यथा दृष्टिस्थानं वेध्यस्थानसमीपगतं भवति तथोन्नतांशा उपचीयन्ते, अधरांशाश्चापचीयन्ते । तथैव दृष्टि स्थानं स्थिर कृत्वा यथा यथा वेध्यस्थानमधोधस्तिष्ठति तथोन्नतांशा अपचीयन्ते, अधरांशाश्चोपचीयन्त इत्याद्यवगन्तव्यम् । अथ य मानस्य घातमापकरूपप्रदानं यथा, $\text{घा}_{\text{द}}\ \text{य} = \text{घा}_{\text{द}}\ \text{अ} + \text{घा}_{\text{द}}\ \text{ज्या(आ – का)} - \text{घा}_{\text{द}}\ \text{ज्या आ} - \text{घा}_{\text{द}}\ \text{कोज्या का}$ । यद्यत्र अ=६० हस्ताः, आ=६०°, का=३०°, तदा चेम्बसंघाताङ्कसारणीतो लब्धतत्तत्प्रघातमापकोत्थापनेन वंशोन्नतिः य=४० हस्ताः सिद्धयन्ति ।

शिखरे स्थित्वा अ, क मूलयोर्वेधे कृते लब्धे क्रमेण दृक्समसूत्रादधरांश-माने=आ, का तथा ∠अ घ क=गा, अ थ च (ग घ) पर्वतौच्च्यम्=य,

तदा अ क घ त्रिभुजे अ घ=य. कोछे* आ। क घ=य. कोछेका

$\therefore$ अ^{2}=य.^{2} कोछे^{2} आ+य.^{2} कोछे^{2} का

—२य.^{2} कोछे आ. कोछे का. कोज्या गा

$$\therefore \text{य} = \frac{\text{अ}}{\sqrt{\text{कोछे}^{2}\text{आ}+\text{कोछे}^{2}\text{का}-2\text{कोछे आ.कोछेका. कोज्यागा}}}$$

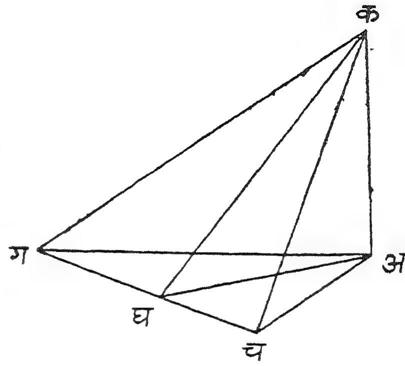
इत्युत्तरम्।

---

* अत्र अ क ग भूतलम्, अ वृक्षमूलस्थानात् ग घ समानान्तरा क च ऊर्ध्वाधर-रेखा कल्पनीया, एवं घ स्थानात् अ ग समानान्तरा घ च रेखा कल्पनीया, अतः अ च= ग घ=य, ततः अ वृक्षमूलस्थानात् घ स्थाने विद्धे अ ग घ च ऊर्ध्वाधरधरातले ∠घ अ च, घस्थानोन्नतांशाः, तत्कोटिः ∠अ घ च=अ वृक्षमूलाधरांशाः=आ, अथ अ घ च त्रिभुजे $\frac{\text{अ घ}}{\text{अ च}}=\frac{1}{\text{ज्या आ}}$, $\therefore$ अ घ=अ च $\times\frac{1}{\text{ज्या आ}}$= य$\times$कोछे आ। एवमेव क वृक्षमूलस्थानात् ग घ समानान्तरा क च′ ऊर्ध्वाधर रेखाकल्पनीया, तथा घ स्थानात् कग समानान्तरा घ च′ रेखा कल्पनीया, अतः क च′=ग घ=य, ततः क स्थानात् घ स्थाने विद्धे ∠ घ क च′ घ स्थानोन्नतांशा तत्कोटिः ∠ क घ च′=क वृक्षमूलाधरांशा=का, अथ क घ च′ त्रिभुजे $\frac{\text{क घ}}{\text{क च}}=\frac{1}{\text{ज्या का}}$,

$\therefore$ क घ=क च′$\times\frac{1}{\text{ज्या का}}$=य$\times$कोछेका। ततोऽग्रे अ घ, क घ भुजयोस्तदन्त-र्गत गा कोणस्य च ज्ञानात् (३८) प्रक्रमानुसारं ग्रन्थे यत्समीकरणं प्रदर्शितं, ततः य मान-मवगन्तव्यम्।

उदा० (६) (अ ग च) समभुविस्थितस्य (अ क) वंशादेः (क) अग्रे (ग च) सरलरेखास्थेषु ग, घ, च स्थानेषु स्थित्वा विद्धे लब्धाः क्रमेणांशाः आ, का, गा, एवं (ग घ) (घ च) रेखयोर्मापने लब्धा हस्ताः अ, क, तथा चैभ्यः (अ क) वंशादेरौच्च्यमवगन्तव्यम् ।



तदा कल्प्यतामत्र (अ क) औच्यम् = य,

∴ अ ग = य.*कोस्प आ, अ घ = य.कोस्प का, अच = य. कोस्प गा ।

$$\text{अथ कोज्या अ घ ग} = \frac{\text{अ घ}^2 + \text{ग घ}^2 - \text{अ ग}^2}{\text{२ अ घ.ग घ}}$$

$$\text{कोज्या अ घ च} = \frac{\text{अ घ}^2 + \text{घ च}^2 - \text{अ च}^2}{\text{२ अ घ.घच}} \text{ ।}$$

परन्तु कोज्या अ घ ग = —कोज्या अ घ च

$$\therefore \frac{\text{अ घ}^2 + \text{ग घ}^2 - \text{अ ग}^2}{\text{२ अ घ.ग घ}} = \frac{\text{अच}^2 - \text{अघ}^2 - \text{घच}^2}{\text{२ अ घ. घ च}} \text{ ।}$$

---

* प्रस्तुतक्षेत्रे, अ क घ, अ क च जात्यत्र्यस्त्रे वर्तेते । अत्र, कल्प्यतां अ क रेखा दक्षिणोत्तरा तदा आ रेखा पूर्वापरास्ति । तदा क अ ग समकोणः । यदा च अ घ, अ च रेखे पूर्वापरे, तदा तयोर्भिन्नधरातलगतत्वेन क्रमेण क अ घ, क अ च समकोणौ भवतः । एवं सति, क अ ग त्रिभुजे $\frac{\text{अ ग}}{\text{य}} = \frac{\text{कोज्या आ}}{\text{ज्या आ}}$ ∴ अ ग = य × कोस्प आ । एवं क अ घ जात्ये $\frac{\text{अ घ}}{\text{य}} = \frac{\text{कोज्या का}}{\text{ज्या का}}$ ∴ अ घ = य × कोस्प का । तथैव अ च = य × कोस्प गा, इति ज्ञेयम् । घातमापकज्ञानसौकर्यार्थमेवैतत्सर्वमत्र प्रपञ्चितमस्ति ।

अथा† त्रत्यपदानि पूर्वसाधितैस्तत्तदुन्मानैरुत्थाप्य समीक्रियया लब्धमौच्यमानम्,

$$य = \sqrt{\frac{अ क (अ + क)}{अ.कोस्प^{२} गा - (अ + क) को स्प^{२} का + क.को स्प^{२} आ}}$$ इत्युत्तरम्।

उदा० (७) पारेनदि दुर्गमस्थाने वर्तमानयो अ, क वृक्षयोरन्तरप्रदेशावगमाय तत्समभूदेशे अवाक् तीरे (ग घ) रेखां अ हस्तमितां

---

† अत्रत्यानि अ घ, अ ग, अ च, ग घ, घ च इमानि पदानि पूर्वसाधित तत्तदुन्मितिभिरुत्थाप्य समीकरणक्रिया प्रदर्श्यते।

$$\frac{अ घ^{२} + ग घ^{२} — अ ग^{२}}{२अ घ^{२}.ग घ} = \frac{अ च^{२} — अ घ^{२} — घ च^{२}}{२अ घ.घ च}$$

$$\therefore \frac{अ घ^{२} + ग घ^{२} — अ ग^{२}}{ग घ} = \frac{अ च^{२} — अ घ^{२} — घ च^{२}}{घ च},$$

$\therefore$ अ घ^{२}.घ च + ग घ^{२}.घ च — अ ग^{२}.घ च = अ च^{२}.ग घ — अ घ^{२}.गघ — घ च^{२}.ग घ, पक्षान्तरनयनेन, ग घ^{२}.घ च + घ च^{२}.ग घ = अ घ^{२}. ग घ + अ ग^{२} × घ च — अ घ^{२} × घ च — अ घ^{२} × ग घ.।

$\therefore$ ग घ.घ च (ग घ + घ च) = अ क (अ + क) जातोऽयं प्रथमपक्षः।

अथा पर पक्षः = अ च^{२}.ग घ + अ ग^{२}.घ च — अ घ^{२}.घ च — अ घ^{२}.ग घ

= ग घ (अ च^{२} — अ घ^{२}) — घ च (अ घ^{२} — अ ग^{२})

= ग घ (य^{२}.कोस्प^{२}गा — य^{२}.कोस्प^{२}का) — घ च (य^{२}.कोस्प^{२}का — य^{२}.कोस्प^{२}आ)

= य^{२} (ग घ. कोस्प^{२}गा — गघ. कोस्प^{२}का — घ च. कोस्प^{२}का + घ.च कोस्प^{२}आ)

= य^{२} (अ. कोस्प^{२} गा — अ.कोस्प^{२}का — क.कोस्प^{२}का + क. कोस्प^{२}आ)।

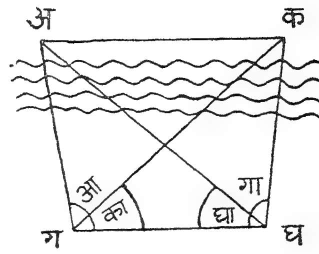
ततः पक्षयोः साम्यकरणेन,

य^{२}\{अ.कोस्प^{२}गा — (अ + क) कोस्प^{२}का + क.कोस्प^{२}आ\} = अ क (अ + क),

$$\therefore य^{२} = \frac{अ क (अ + क)}{अ.कोस्प^{२}गा — (अ + क) कोस्प^{२}का + क.कोस्व^{२} आ},$$

अस्य पदं य मानं ग्रन्थे स्पष्टम्।

परिमाय (ग) स्थानात् मापितयोः (अ ग घ) (क ग घ) कोणयोः क्रमेणांशाः (आ, का) ततः (घ) स्थानात् मापितयोः (क घ ग), (अ घ ग) कोणयोः क्रमेणांशाः (गा, घा) एभ्यः (अ, क) वृक्षयोरन्तरमवगम्यम् तदा (अ ग घ) त्रिभुजात्सिद्धम्,



$$\frac{\text{अ घ}}{\text{ग घ}} = \frac{\text{ज्या अ ग घ}}{\text{ज्या ग अ घ}}$$

$$\therefore \text{अ घ} = \frac{\text{अ.ज्या आ}}{\text{ज्या (आ + घा)}} \text{ ।*}$$

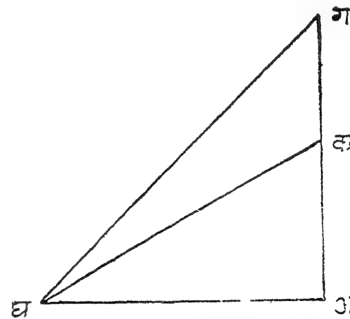
एवमेव (क ग घ) त्रिभुजात्सिद्धम् $\text{क घ} = \frac{\text{अ. ज्या का}}{\text{ज्या (का + गा)}}$ ।

एवं (अ घ), (क घ) भुजौ तदन्तर्गतः (अ घ क) कोणश्चैतेभ्यः (अ क) भुजावगमः (५६) प्रक्रमोक्त तृतीयप्रकारतः किंवा ३८ प्रक्रमतः सुगमः ।

तथाहि, $\text{अक}^2 = \text{अघ}^2 + \text{कघ}^2 - 2 \text{ अघ. कघ.कोज्या अ घ क}$

$$\therefore \text{अ क} = \sqrt{\text{अघ}^2 + \text{कघ}^2 - 2 \text{ अघ.कघ.कोज्या (गा} - \text{घा)}} \text{ ।}$$

उदा० (८) समभुवि वर्तमानस्य (अ क ग) गृहादेः (अ क), क ग प्रदेशौ क्रमेण अ, क हस्तपरिमितावक्गतौ । अथ तद्गृहादेर्दूरत्वावगमाय (घ) स्थानात् (क घ ग) कोणे मापिते लब्धा अंशाः (आ) तथा च (घ अ) दूरत्वं कियत्स्यादिति प्रश्नः ।



* अ ग घ त्रिभुजे, ग घ = अ भुजो ज्ञातः आधारलग्नौ आ, घा, कोणौ च ज्ञातौ, अतः ग अ घ = १८०° − (आ + घा), ∴ ज्या ग अ घ = ज्या (आ + घा), इति कोणज्या कोणोनभार्धांशज्यया तुल्येतिनियमेन सिध्यति । ततोऽग्रे स्फुटम् । अत्र यदि अ, ग, घ, क, एते चत्वारो बिन्दव एक धरातलगता न भवेयुस्तदा अ ग क कोणोऽपि पृथङ् मापयितव्यो भवेत् । यतोऽस्यां स्थितौ अ ग क कोणः आ, का कोणयोरन्तर तुल्यो न भवेत् । अन्यत् सर्वं पूर्ववदेव ज्ञेयम् ।

अत्र किल य = घ अ प्रदेश हस्ताः ।*

तदा स्प क घ ग किंवा स्प आ = स्प (अ घ ग — अ घ क)

$$= \frac{\text{स्प अ घ ग} - \text{स्प अ घ क}}{१ + \text{स्प अ घ ग}.\text{स्प अ घ क}}$$

परन्तु $\text{स्प अ घ ग} = \frac{\text{अ} + \text{क}}{\text{य}}$ । $\text{स्प अ घ क} = \frac{\text{अ}}{\text{य}}$

$$\therefore \text{ उत्थापनेन स्प आ} = \frac{\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{य}} - \frac{\text{अ}}{\text{य}}}{१ + \frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{य}} \cdot \frac{\text{अ}}{\text{य}}} = \frac{\text{क य}}{\text{य}^२ + \text{अ}(\text{अ}+\text{क})} \cdots\cdots (\text{च})$$

अस्मात्समीकरणतः लब्धं (य) मानम् †

$$\text{य} = \frac{\text{क} \pm \sqrt{\text{क}^२ - ४ \text{ अ } (\text{अ}+\text{क}) \text{ स्प}^२ \text{ आ}}}{२ \text{ स्प आ}} \; ;$$

अत्र (स्प आ) अस्य मानं यथा यथा $\frac{\text{क}}{२\sqrt{\text{अ}\ (\text{अ}+\text{क})}}$ अस्मादूनं तेन समं वा ततोऽधिकं वा स्यात् तथा (य) मानं क्रमेण द्विविधमेकविधमसंभाव्यं वा भवेत् ।

---

* एतत्स्वरूपं २० प्रक्रमस्थ (छ) इत्यनुसारतो ज्ञेयम् ।

† $\text{स्प आ} = \frac{\text{क य}}{\text{य}^२ + \text{अ}(\text{अ}+\text{क})}$, अत्र छेदगमेन पक्षान्तरनयनेन च,

$\text{य}^२ - \frac{\text{क य}}{\text{स्प आ}} = -\text{अ}(\text{अ}+\text{क})$, पक्षयोः $\frac{\text{क}^२}{४\text{स्प}^२ \text{ आ}}$ अस्य संयोजनेन,

$\left(\text{य} - \frac{\text{क}}{२\text{स्प आ}}\right)^२ = \frac{\text{क}^२}{४\text{स्प}^२ \text{ आ}} - \text{अ}(\text{अ}+\text{क})$, मूलग्रहणेन, पक्षान्तरनयनेन च

$$\text{य} = \frac{\text{क} \pm \sqrt{\text{क}^२ - ४\text{अ}(\text{अ}+\text{क}) \times \text{स्प}^२\text{आ}}}{२ \text{ स्प आ}}$$

तदेकविधिमानं* च $\sqrt{अ (अ+क)}$ एतत्स्यात् ।

एतत्प्रश्नोत्तरं क्षेत्रमितिरीत्यापि झटित्यवगम्यते ।

तथाहि (क ग) रेखोपरि तथा वृत्तखण्डं कार्यं तथा तद्रेखायां वर्तमानस्तत्खण्डपरिधिलग्नः कोणः (आ) अंशपरिमितः स्यात् । ततः (अ) स्थाने लम्बः कार्यः । तेन लम्बेन तद्वृत्तखण्डे छिन्ने स्पृष्टे वा (अ घ) मानं द्विविधमेकविधमसंभाव्यं वेति स्पष्टमवगतं स्यात् ।

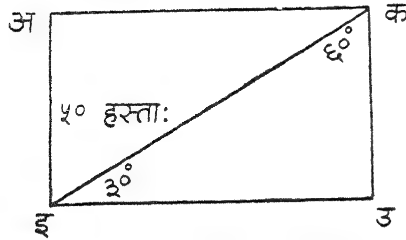
अथ लम्बेन वृत्तखण्डे स्पृष्टे एकविधं (अ घ) दूरत्वमानमिदं $\sqrt{अ (अ+क)}$ क्षेत्रमितितृतीयाध्यायस्य षट्त्रिंशप्रतिज्ञया स्पष्टम् ।

---

* अत्र अ स्थाने कृतेन लम्बेन वृत्तखण्डे छिन्ने स्पृष्टेऽस्पृष्टे वा तथा लम्बमानस्य आ कोणस्पर्श रेखामानतो न्यूनत्वे समत्वेऽधिकत्वे वा क्रमेण य मानं द्विविधमेकविधमसंभाव्यं वा कथं भवतीति प्रदर्श्यते । रेखागणितस्य ३६ प्रतिज्ञया स्पर्शरेखावर्गश्छेदनरेखातद्बाह्यखण्डघातेन समोभवतीत्यवगम्यते । प्रकृते स्पर्शरेखा $=$ अ स्थाने कृतोलम्बः $=$ अ घ $=$ य, छेदनरेखा $=$ अ $+$ क, तद्बाह्यखण्डम् $=$ अ इति कल्प्यते । $\therefore$ $य^2 = अ\ (अ+क)$, $\therefore$ $य = \sqrt{अ(अ+क)}$ । अथानेन य मानेन पूर्वोक्ते आकोण स्पर्शरेखायाः (च) माने उत्थापिते स्पआ $= \frac{क}{२\sqrt{अ(अ+क)}}$ इति भवति । एतन्मानेन पूर्वोक्ते य माने उत्थापिते $य = \sqrt{अ(अ+क)}$, इत्येकविधमेव य मानं भवति, य मानस्थितकरणीचिह्नान्तर्गतपदद्वयान्तरस्य शून्यसमत्वात् । एतेन लम्बेन वृत्तखण्डे स्पृष्टे अथ च स्पर्शरेखाया माने $\frac{क}{२\sqrt{अ(अ+क)}}$, अनेन समे य मानमेकविधं भवतीत्युपपद्यते । एवं लम्बेन वृत्तखण्डे छिन्ने छेदनरेखासम्मुख चापद्वयान्तर्गतकोणद्वयतुल्यं यमानं द्विविधं भवति । तथात्र (आ) कोणोत्पादकभुजद्वयवर्धनेन तदन्तर्गत (आ) कोणस्पर्शरेखाखण्डतश्छेदनरेखाखण्डस्य न्यूनत्वात् न्यूनेन छेदनरेखाखण्डतुल्येन य मानेन (आ) कोणस्पर्शरेखामाने उत्थापिते तन्मानं पूर्वोक्तमानतोऽल्पं स्यादिति स्पष्टम् । अतोऽल्पे तन्माने य मानं द्विविधं भवतीत्युपपन्नम् । एवमेव (आ) कोणस्पर्शरेखातोबहिः स्थितं यद्वर्धितभुजद्वयान्तर्गतं लम्बरूपखण्डं तस्योक्तस्पर्शरेखाखण्डतोऽधिकत्वेन वृत्तखण्डाऽस्पृष्टत्वात् य मानं ज्ञातुमशक्यम् । तस्यवृत्तखण्डसम्बन्धाभावादिति सर्वं निरवद्यम् ।

अथाग्रे ग्रन्थोक्तेष्वभ्यासार्थमुदाहरणरूपप्रश्नेषु प्रत्येकस्य सोपपत्तिकमुत्तरं छात्रजनोपकाराय तत्तत्प्रश्ननिर्देशपुरस्सरं क्रमशो विलिख्यते । तत्र

(१) प्रश्नः । यस्यायतक्षेत्रस्य कोटिः ५० (अ) हस्ताः । तस्य कोट्यैकप्रान्ते स्थित्वा सम्मुखकोटिप्रान्तयोरन्तर्गतकोणे विद्धे लब्धा अंशाः ३०° (आ) तथा च तस्य भुजप्रमाणं कियदिति ।



अस्योत्तरम् ।

कल्प्यते अइउक आयत क्षेत्र यस्यैको भुजः अइ = अ = ५० हस्ताः । अत्र अइ भुजस्य इ प्रान्ते स्थित्वा उक भुजस्य क प्रान्तवेधेन लब्धाः कोणांशाः = ३०° = आ । एवमिह इ उ क जात्यत्रिभुजे,

$$\frac{\text{ज्या } ६०^\circ}{\text{ज्या } ३०^\circ} = \frac{\text{इ उ}}{\text{अ इ}} \therefore \text{इ उ} = \frac{\text{अ इ} \times \text{ज्या } ६०^\circ}{\text{ज्या } ३०^\circ},$$

हरांशौ ज्या ६०° अनेन विभक्तौ,

$$= \frac{\text{अ इ}}{\frac{\text{ज्या } ३०^\circ}{\text{ज्या } ६०^\circ}} = \frac{\text{अ इ}}{\text{स्प } ३०^\circ} = \frac{\text{अ}}{\text{स्प आ}} \text{ । } \because \text{ ज्या } ३०^\circ = \tfrac{१}{२},$$

$$\therefore \text{ज्या } ६०^\circ = \frac{\sqrt{३}}{२} \therefore \text{स्प आ} = \frac{\frac{१}{२}}{\frac{\sqrt{३}}{२}} = \frac{१}{\sqrt{३}}$$

$$\therefore \text{इ उ भुजः} = \frac{\text{अ}}{\frac{१}{\sqrt{३}}} = \text{अ} \times \sqrt{३} = ५०\sqrt{३}$$

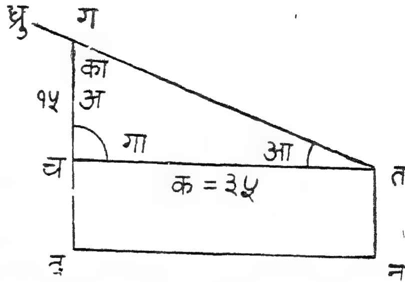
$= \sqrt{२५०० \times ३} = \sqrt{७५००}$ अस्य मूलानयनरीत्यामानम्

= ८६·६०२५४ हस्ताः ।

(२) प्रश्नः । पूर्वापरायताया भित्तेर्दृक्सूत्रादुच्छ्रितिः १५ (अ) हस्ताः, तस्या भित्तेर्दक्षिणपार्श्वे ३५ (क) हस्तान्तरे देशे स्थित्वा ध्रुवतारायां विलोकितायां

सा भित्त्यूर्ध्वप्रान्तलग्ना दृश्यते । तत्र तदानीं ध्रुवोन्नतिः $स्प^{-1}\frac{अ}{क}$ = २३° । ११′ । ५६″, इति प्रमाणीक्रियताम् । अत्र यावतः कोणस्य चापस्य वा स्पर्श रेखा $\frac{अ}{क}$ स्यात्, तावतोद्योतकं $स्प^{-1}\frac{अ}{क}$ एतत्स्यात् । एवं $ज्या^{-1}\frac{अ}{क}$ $कोज्या^{-1}\frac{अ}{क}$ इत्यादीनि $\frac{अ}{क}$ तुल्य ज्या कोटिज्यादीनां कोणांश्चापान् वा द्योतयन्ति ।

(अत्र १० प्रक्रमस्था टिप्पण्यपि विलोक्या)



अस्योत्तरम् ।

कल्प्यते, च त द न समभूमेरुपरि पूर्वापरायता १५ हस्तोच्छ्रिता भित्तिरस्ति । भित्तिमूलात् च स्थानात् दक्षिणतः तस्थाने उत्थाय रात्रौ यद्युत्तरस्यां दिशि विलोक्यते तदा ध्रुवतारा तद्भित्तेरग्रप्रदेशे ग बिन्दावेव दृश्यते । अत्र ध्रुवोन्नतिरपेक्ष्या । अत्र ग च त त्रिभुजे अ, क, ग क्रमेण भुजाः कोणाश्च आ, का, गा । जात्यत्वात् गा = ९०° । अत्र आ कोणमानमेव यतो ध्रुवोन्नतिः, अतस्तज्ज्ञानार्थं, ज्या का किंवा कोज्या आ : ज्या आ : : १ : स्प आ,

$$\therefore \text{ स्प आ} = \frac{\text{ज्या आ}}{\text{ज्या का}} = \frac{\text{ज्या आ}}{\text{कोज्या आ}} = \frac{\text{अ}}{\text{क}},$$

अतोऽस्य प्रधातमापकरूपम् ।

$प्रघा_{द}स्प\ आ = १० + प्रघा_{द}अ - प्रघा_{द}क$

= १० + १·१७६०९१३ − १·५४४०६८० = ९·६३२०२३३,

एतच्चापः = २३° । ११′,

अत्र विकलाज्ञानार्थं चेम्बर्स सारिणीतः $प्रघा_{द}स्प$(२३°।११′) = ९·६३१७०३७,

अथ ९·६३२०२३३ − ९·६३१७०३७ = ३१९६

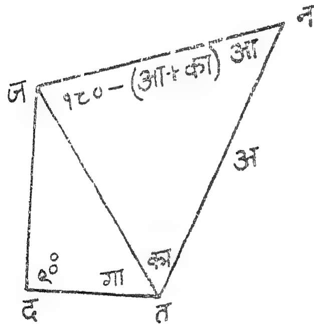
तथा $प्रघा_{द}स्प$ (२३° । ११′) − $प्रघा_{द}स्प$ (२३° । १२′) = ३४९० = स्पर्शरेखायाः पूर्वापरान्तरम्,

$$\therefore \frac{३१९९ \times ६०''}{३४९०} = \frac{१९१७६०}{३४९} = ५५''$$

$\therefore$ प्रथा$_{द}$स्प आ $=$ ९·६३२०२३३ एतच्चापः २३° । ११′ । ५५″=आकोणः,

$\therefore$ ध्रुवोन्नतिः $=$ स्प$^{-१}$ आ $=$ २३° । ११′ । ५५″ ।

(३) प्रश्नः । कस्यचिद्वंशादेरौच्च्यावगमाय गणकस्तत्समभुवि सरल प्रदेशं २०० (अ) हस्तमितं परिमाय तत्प्रदेशैकप्रान्तात् तदपरप्रान्तस्य वंशाद्यग्रस्य चान्तर्गतकोणं ५०° । १२′, (आ) अंशमितं विध्वा तत्प्रदेशापरप्रान्ताच्च तदाद्य-प्रान्तस्य वंशाद्यग्रस्य चान्तर्गतकोणं ४०° । २५′ (का) अंशमितं वंशाद्यग्रस्य चोन्नति ५७° । ४०′, (गा) अंशमितां विद्धवान् । तथा च तस्य वंशादे रौच्च्यं कियत्स्यादिति ।



अस्योत्तरम् ।

द त न समानभूमाविष्टप्रमाणो जद-वंशोऽस्ति । यस्य द मूलात् द त प्रदेशस्य त स्थाने कश्चिद् द्रष्टा स्थितः । तस्मात् ज वंशाग्रवेधेन ∠ ज त द = गा = ५७° । ४०′ । अथ द त मार्ग मपहायान्यं तन मार्गमनुसृत्य शतद्वयमितस्य त न तुल्यस्य अ प्रदेशस्य न स्थाने गतेन तेनैव द्रष्ट्रा वंशाग्रं विद्धम् । यत्र ∠ज न त ∠आ=५०° । १२′, एवं ∠ज त न=∠का=४०° । २३′ इति ज्ञातवान् । अतः ज त न त्रिभुजे त ज न कोणस्यापि ज्ञानं सुलभम् । अत्र वंशोच्छ्रितिरवगम्या । एतदर्थं प्रथमं जत प्रमाणमानीयते, तद्यथा—

$$\text{ज त न त्रिभुजे}, \frac{\text{अ}}{\text{ज्या}\ \{१८० - (\text{आ} + \text{का})\}} = \frac{\text{अ}}{\text{ज्या}\ (\text{आ} + \text{का})} =$$

$$\frac{\text{ज त}}{\text{ज्या आ}}\ \text{३५ प्रकमस्य}$$

(१) टिप्पण्यनुसारम्,

$$\therefore \frac{\text{अ} \times \text{ज्या आ}}{\text{ज्या}\ (\text{आ} + \text{का})} = \text{ज त},$$

एवं ज त द त्रिभुजे, १ : ज त : : ज्या गा : ज द,

$$\therefore \text{ज द} = \frac{\text{ज त} \times \text{ज्या गा}}{१} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्या आ} \times \text{ज्या गा}}{\text{ज्या (आ + का)} \times १},$$

$$\therefore \text{प्रधा}_{\text{द}}\text{जद} = \text{प्रधा}_{\text{द}}\text{अ} + \text{प्रधा}_{\text{द}}\text{ज्या आ} + \text{प्रधा}_{\text{द}}\text{ज्या गा}$$

$$- \text{प्रधा}_{\text{द}}\text{ज्या (आ + का)} - \text{प्रधा}_{\text{द}}१$$

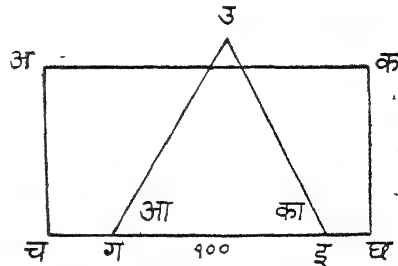
$$= २.३०१०३०० + ९.९२६८३१४ + ९.८८५५२१५ - ९.९९९९७४८$$

$$- ०.००००००० - १०,$$

$$= \begin{array}{r} २२.११३३८२९ \\ -१९.९९९९७४८ \\ \hline २.११३४०८१ \end{array} \quad \therefore \text{प्रधा}_{\text{द}} \text{ जद} = २.११३४०८१,$$

अस्य संख्या = १२९.८४ ∴ जद = १२९.८४ हस्ताः ।

(४) प्रश्नः । पारेदुस्तरनदि किञ्चिद्गृहादि वर्तते । तस्यार्वाक्तीराद्दूरत्वावगमायावारतीरे १०० (अ) हस्तमितं तिर्यक्प्रदेशं परिमाय तत्प्रदेशैकैकप्रान्तात्तदपर प्रान्तस्य गृहादेश्चान्तर्गतकोणे मापिते लब्धे क्रमेण कोणमाने ४०° । २५′ (आ) । ३७° । ४८′ (का) तथा च प्रतितत्प्रदेशप्रान्तात्तद्गृहं कियति कियत्यन्तरे वर्तत इति ।



अस्योत्तरम् ।

अत्र कल्प्यते, अ क च छ नदीपात्रम्, च छ = नद्या अवाक् तीरम्, तत्रत्यः शतहस्तमितोमापितप्रदेशः ग इ = १०० = अ, पारेनदि गृहस्थानम् = उ, अथ ग स्थानात् उ स्थाने विद्धे लब्धाः ∠ उ ग इ कोणांशाः ४०° । २५′ = आ, एवं इ स्थानात् उ स्थाने विद्धे लब्धाः उ इ ग कोणांशाः ३७° । ४८′ = का, अत्र ग, इ स्थानद्वयात् गृहान्तरद्वयमपेक्ष्यते । तदर्थम्,

$$१०० = \text{अ} । \quad \frac{\text{अ}}{\text{ज्या } \{१८० - (\text{आ} + \text{का})\}} = \frac{\text{अ}}{\text{ज्या (आ + का)}}$$

$$= \frac{\text{इ उ}}{\text{ज्या आ}} = \frac{\text{ग उ}}{\text{ज्या का}} \text{(३५ प्र क्र म)},$$

$$\therefore \text{ इ उ} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्या आ}}{\text{ज्या (आ + का)}},$$

$$\text{एवं गउ} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्याका}}{\text{ज्या(आ + का)}} \text{ ।}$$

द्वयोः क्रमेण प्रघातमापकरूपे ।

अत्र अ = १०० = $१०^{२}$, अतः $\text{प्रघा}_{\text{द}}१०^{२}$ = २·००००००० , इति ज्ञेयम् ततः,

$$\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ इउ} = \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्याआ} - \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या (आ + का)}$$

= २·००००००० + ९·८११८०३८ — ९·९६०७५०२

= १·८२१०५३६ अस्य संख्या = ६६·२२९८२,

∴ इउ = ६६·२२९८२ हस्ताः ।

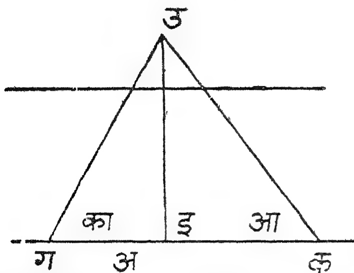
$$\text{एवम् प्रघा}_{\text{द}}\text{गउ} = \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्याका} - \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या (आ + का)}$$

= २·००००००० + ९·७८७३९४६ — ९·९६०७५०२

= १·७९६६४४४, अस्य संख्या = ६२·६१०१,

∴ गउ = ६२·६१०१ हस्ताः ।

(५) प्रश्नः । कस्याश्चिद्दुस्तरनद्याः पात्रविस्तृत्यवगमायार्वाक्तीरे ६० (अ) हस्तमितं तिर्यक् प्रदेशं परिमाय प्रतितत्प्रदेशप्रान्तात्तदपरप्रान्तस्य परतीरवर्त्तिनः कस्यचित्प्रस्तरादेश्चान्तर्गतकोणे मापिते लब्धे क्रमेण कोणमाने ४२° । १७′ (आ), ५२° । ३५′ (का) । तथा च तस्या नद्याः कियती विस्तृतिरिति ।



अस्योत्तरम् ।

कल्प्यते, नद्या अपरतटस्थः कश्चित् पदार्थः उ । प्राक्तटस्थेन क स्थानात्तं विध्यता द्रष्ट्रा आ कोणो ज्ञातस्तथा क स्थानात् अ षष्टिमितं हस्तान्तरं तिर्यग्गत्वा ततस्तमेव विध्यता तेन का कोणोऽपिज्ञातः । एवं त्रिभुजस्य कोणाभ्यां तदेकज्ञातभुजेन च नदीविस्तारोऽवगम्यः ।

दर्शितक्षेत्रे १८०° —(आ + का) = उ कोणः, क ग = अ = ६० हस्ताः ।

$$\therefore \text{ उग} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्याआ}}{\text{ज्या (आ+का)}}$$

$\because$ १ : उ ग : : ज्या का : उ इ, $\therefore$ उइ = उग $\times$ ज्या का,

$$\therefore \text{ नदीविस्तारः} = \text{उइ} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्याआ} \times \text{ज्याका}}{\text{ज्या (आ+का)} \times १}$$

अस्य प्रघातमापकरूपम् ।

$\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{उइ} = \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या आ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्याका}$

$-\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या (आ+का)} - १०$

= १.७७८१५१३ + ९.८२७८८४३ + ९.८९९९५०६ — १९.९६८४३१५ — १०

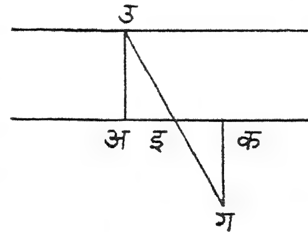
= २१.५०५९८६२ — १९.९६८४३१५ = १.५०७५५४७

अस्य संख्या = ३२.१७७६९……।

$\therefore$ उ इ = नदीविस्तारः = ३२.१७७६९……हस्ताः ।

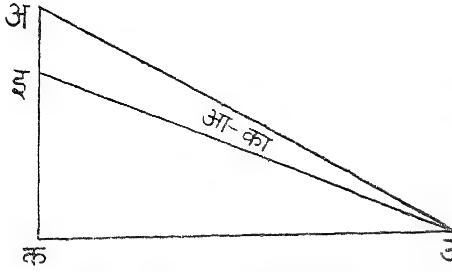
अथ केवलं रेखागणितेनास्योपपत्तिः ।

अन्यथाऽपि नदीविस्तारोऽवगन्तुं शक्यते । कल्प्यते, नद्या अपरपार्श्वे कश्चिद् उ बिन्दुः अ बिन्दुस्थेन द्रष्ट्रा तथाऽवलोक्यते यथा नदीतटरूपायाम् अक रेखायाम् उ अ रेखा लम्बरूपा भवेत् । ततः अ बिन्दुत उक्त नदीतट रेखास्थित कल्पित इ बिन्दुर्यावति दूरे यद्दिशि तावति दूरे तद्दिश्येव इ बिन्दुतः क बिन्दौ गत्वा ततः क ग रूपायां लम्बरेखायां स द्रष्टा तथा चलितो यथा इ बिन्दुं पश्यन् उ बिन्दुमपि पश्येत् । तदा (रे. १ अ. २६ प्र.) अ उ = क ग, अयमेव नदीविस्तारः सुसिद्धः ।



(६) प्रश्नः । काश्यां गङ्गापात्रे वर्तमानायाः कस्याश्चिन्महातरण्याः सम्मुखतटदेशवर्तिनि चत्वारिंशत् (अ) हस्तौच्ये गृहे स्थितेन मनुजेन तद्गृहतलोर्ध्वदेशाभ्यां प्रत्येकं समसूत्रादधरांशाविद्धास्ते क्रमेण ४०° । १५′ (आ), २५° । ३०′ (का) अंशमिताः । तथा च तद्गृहतलं गङ्गापात्रजलपृष्ठसमदेशात्कियत्यामुच्छ्रूत्यां वर्तते, तदुच्छ्रूति देशमूलाच्च सा महानौः कियद्दूरे वर्तत इति ।

अस्योत्तरम् ।



अत्र कल्प्यते, अ इ = गृहौच्चयम् = अ = ४० । अ बिन्दुगृं होर्ध्वप्रदेशः । इ बिन्दुगृं हतलप्रदेशः । उ बिन्दुस्था महानौः । क उ = उच्छ्रिति प्रदेशमूलान्नौकाधिष्ठितप्रदेशदूरता, क इ = नदीजलपृष्ठात् गृहतलोच्छ्रितिः।

तत उपरि निर्दिष्टक्षेत्रे क इ उ त्रिभुजे उ स्थानात् इ स्थाने विद्धे ∠इ उ क = गृहतलप्रदेशोन्नतांशाः = ४९° । ४५′ = फा तत्कोटिः इ स्थानात् उ स्थाने विद्धे ∠उ इ क = गृहतलप्रदेशाधरांशाः = ४०° । १५′ = आ, एवं क अ उ त्रिभुजे अस्थानात् उ स्थानेविद्धे ∠अ उ क = गृहोर्ध्वप्रदेशोन्नतांशाः = ६४° । ३०′ = पा, तत्कोटिः अ स्थानात् उ स्थाने विद्धे ∠क अ उ = गृहोर्ध्वप्रदेशाधरांशाः = २५° । ३०′ = का । अथात्र क्रमेण गृहतलोर्ध्वप्रदेशाधरांशसूचकाभ्यां आ, का कोणाभ्यामुच्छ्रिति प्रमाणं प्रसाध्यते । यथा, अ इ उ त्रिभुजे, ज्या (पा − फा) : अ इ : : ज्या का : इ उ,

$$\therefore\ \text{इ उ} = \frac{\text{अ इ} \times \text{ज्या का}}{\text{ज्या (पा − फा)}},$$ एवं क इ उ त्रिभुजे, १ : इ उ : : कोज्या आ : क इ,

$$\therefore\ \text{क इ} = \frac{\text{इ उ} \times \text{कोज्या आ}}{१} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्या का} \times \text{कोज्या आ}}{१ \times \text{ज्या (पा − फा)}} =$$

उच्छ्रितिः । अस्य प्रघातमापक स्वरूपं यथा,

$$\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{क इ} = \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या का} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ कोज्या आ} — १० — \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या (पा—फा)}$$

$$= \text{प्रघा}_{\text{द}}४० + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या } (२५° । ३०′) + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ कोज्या } (४०° । १५′) — १० — \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ ज्या } (१४° । ४५′)$$

अतः,
+ १·६०२०६००
+ ९·६३३९८४४
+ ९·८८२६५६८
—१०
− ९·४०५८६१७

= +२१·११८७०१२ — १९.४०५८६१७ = १·७१२८३९५ = $\text{प्रघा}_{\text{कइ}}$, अस्य संख्या = ५१·६२२५६ हस्ताः

=उच्छ्रितिः । अत्र कोणद्वयान्तरं तत्कोट्यंशान्तरेण समं भवतीत्यतः पा − फा = आ − का, इति ज्ञेयम् । अथात्र क अ उ त्रिभुजे गृहोर्ध्वप्रदेशोन्नतांशकोणः = ∠अ उ क = ४०° । १५′ = आ, तथा क इ उ त्रिभुजे गृहतलप्रदेशोन्नतांशकोणः = ∠इ उ क = २५° । ३०′ = का, इति प्रकल्प्योच्छ्रितिर्दूरत्वं च प्रसाध्यते । यथा, अ इ उ त्रिभुजे, ज्या (आ − का) : अ इ : : कोज्या आ : इ उ ∴ इ उ = $\frac{\text{अ इ} \times \text{कोज्या आ}}{\text{ज्या (आ − का)}}$, एवं क इ उ त्रिभुजे, १ : इ उ : : ज्या का : क इ, ∴ क इ = $\frac{\text{इ उ} \times \text{ज्या का}}{\text{१}} = \frac{\text{अ} \times \text{कोज्या आ} \times \text{ज्या का}}{\text{१} \times \text{ज्या (आ − का)}}$ । इदमुच्छ्रितिस्वरूपं पूर्वप्रसाधित-तत्स्वरूपतुल्यमेव निष्पन्नम् । अथ दूरत्वप्रसाधनाय, क इ उ त्रिभुजे, १ : इ उ : : कोज्या का : क उ, ∴ क उ = दूरत्वं = $\frac{\text{अ} \times \text{कोज्या आ} \times \text{कोज्या का}}{\text{१} \times \text{ज्या (आ − का)}}$ । अस्य प्रघातमापकस्वरूपं यथा,

प्रघा$_{\text{द}}$कउ = प्रघा$_{\text{द}}$४० + प्रघा$_{\text{द}}$कोज्या(४०° । १५′) + प्रघा$_{\text{द}}$कोज्या(२५° । ३०′) − १० − प्रघा$_{\text{द}}$ज्या (१४° । ४५′)

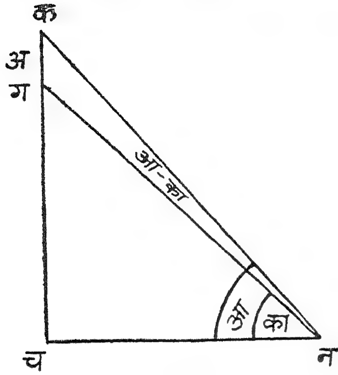
अतः,
+ १·६०२०६००
+ ९·८८२६५९८
+ ९·९५५४८८२
− १०
− ९·४०५८६१७
} = +२१·४४०२०५० − १९·४०५८६१७ = २·०३४३४३३ = प्रघा क उ, अस्य संख्या = १०८·२२८९ हस्ताः = दूरत्वम् । अथप्रकारान्तरेण दूरत्वं प्रसाध्यते । यथा,

क अ उ त्रिभुजे ∠अ उ क = ४०° । १५′ = आ, अ क = अ इ + कइ = ४० + ५१·६२२५६ = ९१·६२२५६, इतिज्ञेयम् । अत उक्त त्रिभुजे, ज्या आ : अ क : : कोज्या आ : क उ = $\frac{\text{अ क} \times \text{कोज्या आ}}{\text{ज्या आ}}$ = दूरत्वम् । अस्य प्रघातमापकस्वरूपं यथा,

प्रघा$_{\text{द}}$क उ = प्रघा$_{\text{द}}$९१·६२४८ + प्रघा$_{\text{द}}$कोज्या आ − प्रघा$_{\text{द}}$ज्या आ । अतः,

{
+ १·९६२००२४
+ ९·८८२६५९८
− ९·८१०३१५९
} = +११·८४४६५९२ − ९·८१०३१५९ = २·०३४३४३३ = प्रघा क उ, अस्य संख्या = १०८·२२८९ हस्ताः = दूरत्वम् ।

७ प्रश्नः । कस्यचित्पर्वतस्य शिखरे ५० (अ)हस्तौच्च्यं देवगृहं वर्तते तस्याग्रमूलयो स्तत्पर्वतोपत्यकायां स्थितेन मनुजेन विद्धयोः लब्धे क्रमेणोन्नतांशमाने ५१° । ४०' (आ) । ५०° । १५' (का) तदा च तत्पर्वतौच्च्यं कियदिति । अस्योत्तारम् ।



अत्र च न पर्वतोपत्यकाभूमौ द्रष्टुः स्थानम् =न । च ग पर्वतस्य ग शिखरे कग देवगृहम् । न स्थानतो देवगृहाग्रवेधेन उन्नतांशाः $\angle$क न च=आ, एवं देवगृहमूलवेधेन उन्नतांशाः $\angle$ग न च=का, कग=अ ।

आ=५१° । ४०', का=५०° । १५' ।

अ=५० हस्ताः ।

अत्र क न च त्रिभुजस्य जात्यात्

$$\angle \text{च क न} = 90^\circ - \angle \text{क न च} \therefore \frac{\text{क ग}}{\text{ज्या} \angle \text{क न ग}} = \frac{\text{ग न}}{\text{ज्या} \angle \text{च क न}}$$

$$= \frac{\text{अ}}{\text{ज्या (आ—का)}} = \frac{\text{ग न}}{\text{कोज्या आ}} \therefore \text{ग न} = \frac{\text{अ} \times \text{कोज्या आ}}{\text{ज्या (आ — का)}} \text{।}$$

$$\therefore \frac{\text{ग न}}{१} = \frac{\text{च ग}}{\text{ज्या} \angle \text{ग न च}} = \frac{\text{अ} \times \text{कोज्या आ}}{\text{ज्या (आ — का)} \times १} = \frac{\text{च ग}}{\text{ज्या का}} \text{।}$$

$$\therefore \text{च ग} = \text{पर्वतौच्च्यम्} = \frac{\text{अ} \times \text{कोज्या आ} \times \text{ज्या का}}{\text{ज्या (आ—का)} \times १}$$

$$\therefore \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{चग} = \text{प्रधा}_{\text{द}}\text{अ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{कोज्या आ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या का}$$

$$- \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या (आ — का)} — \text{प्रघा}_{\text{द}}१ — १० \text{।}$$

+ १·६९८९७००
+ ९·७९२५५६६
+ ९·८८५८३७०
+२१·३७७३६३६
— ८·३९३१००८
—१०·०००००००
२·९८४२६२८

$\therefore$ प्रधा$_{\text{द}}$च ग=२·९८४२६२८, अस्य संख्या =९६४·४१२४ ।

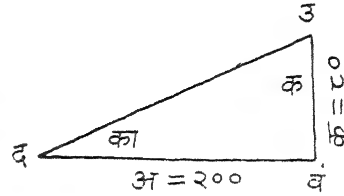
$\therefore$ च ग=९६४·४१२४ हस्ताः, एतदेव पवतौच्च्यम् ।

अत्र घा$_{\text{द}}$१=०·०००००००, इति ज्ञेयम् ॥

(८) प्रश्नः। कस्यचिन्महासरसो दक्षिणोत्तरभागयोरीश्वरप्रसादौ वर्तेते। तयोरन्तरप्रदेशावगमाय तत्सरसः पूर्वभागे तथा वंशो निखनितः यथा स दक्षिण प्रासादात् २०० (अ) हस्तान्तरे स्यात्, उदक् प्रासादाच्च ८० (क) हस्तान्तरे भवेत्। ततो दक्षिणप्रासादाद्वंशोदक्प्रासादयोरन्तर्गतकोणे मापिते लब्धा अंशाः २१° । १७′ (का)। अत्र पृच्छा तयोः प्रासादयोरन्तरं कियदिति।

अस्योत्तरम्।

द सरसो दक्षिणभागः, उ उत्तारभागः, वं पूर्वभागे द स्थानात् अ हस्तान्तरे तथा उ स्थानात् क हस्तान्तरे वंशमूलम्, अत्र वं द उ कोणो वेधेन ज्ञातः = का, द वं = अ, उ वं = क।



$\therefore$ (३८) प्रक्रमतः कोज्या का $= \dfrac{\text{अ}^2 + \text{द उ}^2 - \text{क}^2}{२\ \text{अ.दउ}}$

$\therefore$ क^2 − अ^2 = द उ^2 − २ अ.द उ. कोज्या का, पक्षयोः अ^2. कोज्या^{2} का अस्य योजनने, क^2 − अ^2 + अ^2. कोज्या^{2} का

= दउ^2 − २ अ.दउ, कोज्या का + अ^2. कोज्या^{2} का, मूलग्रहणेन,

$\pm\sqrt{\text{क}^2 - \text{अ}^2\ (१ - \text{कोज्या}^2\ \text{का})}$

= दउ − अ. कोज्या का

$\therefore$ द उ = अ. कोज्या का $\pm\sqrt{\text{क}^2 - \text{अ.}^2\ \text{ज्या}^2\ \text{का}}$

अत्र अ. कोज्या का = ग, कल्प्यते, तदा प्रघा$_{\text{द}}$ग

= प्रघा$_{\text{द}}$अ + प्रघा$_{\text{द}}$कोज्या का − १० = $\left\{\begin{array}{l} +\ २.३०१०३०० \\ +\ ९\text{·}९६९३२१२ \\ -१० \end{array}\right\}$

+ २·२७०३५१२ अस्य संख्या

= १८६·३५९३

$\therefore$ ग = १८६·३५९३। अथ क^2 − अ^2. ज्या^{2} का एतन्मूलार्थं

अ^2.ज्या^{2} का = च^2 कल्प्यते तदा च = अ·ज्या का $\therefore$ प्रघा$_{\text{द}}$च

= प्रघा$_{द}$ अ + प्रघा$_{द}$ ज्या का − १० = { + २·३०१०३००, + ९·५५९८८२९, − १०° } = १·८६०११२९

∴ प्रघा$_{द}$ च^{२} = २(१.८६०११२९) = ३·७२१८२५८ अस्य संख्या = ५२७०.२२

∴ च^{२} = ५२७०·२२

∴ द उ = अ. कोज्या का ± √(क^{२} — अ^{२}. ज्या^{२} का)

= ग ± √(क^{२} − च^{२}) = ग ± √(६४०० − ५२७०·२२)

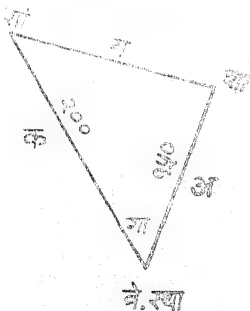
= ग ± √(११२९·७८) = ग ± ३३·६१२२

= १८३·३५६३ ± ३३·६१२२ = { २१६·९७२ वा १५२·७५ }

∴ द उ = २१६·९७२ वा १५२·७५ हस्ताः ।

(९) प्रश्नः । समुद्रान्तःप्रविष्टयोर्भूदेशयोरग्रयोर्महान्तौ शाल्मलीवृक्षावास्ताते । तयोरन्तरप्रदेशावगमाय भूमिस्थात् कस्माच्चित् स्थानात् प्रतिवृक्षपर्यन्तं मापितौ प्रदेशौ क्रमेण १५० (अ), २०० (क) हस्तात्मकौ स्याताम् । अथ तस्मादेव स्थानात् तयोर्वृक्षयोरन्तर्गतकोणे मापिते लब्धाः किलांशाः ५०° । २७′ (गा) तथा च तयोर्वृक्षयोरन्तर प्रदेशः कियानिति ।

अस्योत्तरम् ।



वे.स्था

अत्र शा′, शा शाल्मलीवृक्षौ, अ, क भुजौ, (गा) तदन्तर्गतकोणश्चैते ज्ञाताः । एभ्यो ग भुजप्रमाणमन्वेष्यम् ।

(३८) प्रक्रमतः कोज्या गा = (अ^{२} + क^{२} — ग^{२}) / (२ अ क)

∴ २ अ. क. कोज्या गा = अ^{२} + क^{२} − ग^{२},

∴ ग^{२} = अ^{२} + क^{२} − २ अ. क. कोज्या गा,

∴ ग = √(अ^{२} + क^{२} − २ अ. क. कोज्या गा),

अत्र २ अ. क. कोज्या गा = च,

प्रघा$_{द}$ च = प्रघा$_{द}$ २ + प्रघा$_{द}$ अ + प्रघा$_{द}$ क + प्रघा$_{द}$ कोज्या गा — १०,

$$
= \left\{ \begin{array}{r} ०\text{·}३०६०३०० \\ ३\text{·}१७०६९१३ \\ १\text{·}३०२०३०० \\ ९\text{·}८०३३६३३ \end{array} \right\}
$$

$$
\begin{array}{r} १४\text{·}५८२१२१२ \\ -१०\text{·}००००००० \\ \hline ४\text{·}५८२१२१२ \end{array}
$$

∴ प्रधा$_{द}$च = ४·५८२१२१२ अस्य संख्या ३८२०५·११४

∴ ग = $\sqrt{\text{अ}^{२} + \text{क}^{२} - ३८२०५\text{·}११४}$,

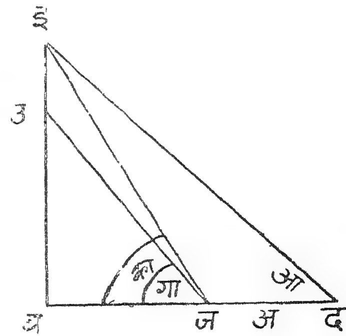
= $\sqrt{२२५०० + ४०००० - ३८२०५\text{·}११४}$,

= $\sqrt{६२५०० - ३८२०५\text{·}११४}$,

= $\sqrt{२४२९४\text{·}८८६}$ = १५५·८७ हस्ताः ।

(१०) प्रश्नः । पर्वतशिखरे प्रस्तरमयस्तम्भो वर्तते तस्यौच्चचावगमाय तत्पर्वतनिकटभूमौ स्थित्वा स्तम्भाग्रोन्नतिवेधे लब्धा अंशाः ३१° । २०′ (आ) । ततः स्तम्भदिश्येवाग्रे सरलभूमौ १५० (अ) हस्तमितदेशं गत्वा स्तम्भमूलाग्रोन्नत्योर्वेधे कृते लब्धाः क्रमेणांशाः ४५° । ४२′ (का) । ३५° । ३३′ (गा) । तथा सति स्तम्भौच्च्यं कियत्पर्वतौच्च्यं च कियदिति ।

अस्योत्तरम् ।



च उ = पर्वतौच्च्यम् , तत्र उ इ स्तम्भः, द प्रथमवेधस्थानम् । ज पर्वताधःप्रदेशस्थ द्वितीयवेधस्थानम् । इ द ज कोणः = आ = ३१° । २०′, इ ज च कोणः = का = ४५° । ४२′, उ ज च कोणः = गा = ३५° । ३३′, ज द = अ = १५०, अत्र पर्वतौच्च्यं स्तम्भोच्छ्रितिश्चैते अपेक्ष्ये । द ज इ त्रिभुजे, ∵ ∠का = ∠आ + ∠जइद (रे.ग.१ अ. १६ प्र.)

∴ ∠ जइद = का — आ,

$$
\therefore \text{इ ज} = \frac{\text{अ} \times \text{ज्या आ}}{\text{ज्या (का — आ)}}
$$

एवं इ उ ज त्रिभुजे, इ ज उ कोणः = का − गा, अत्र कोज्या गा = कोज्या ∠ज उ च = कोज्या ∠ज उ इ,

$$\therefore \text{इ उ} = \frac{\text{इ ज} \times \text{ज्या (क—गा)}}{\text{कोज्या गा}}$$

$$= \frac{\text{अ} \times \text{ज्या आ} \times \text{ज्या(का—गा)}}{\text{ज्या (का—आ) कोज्या गा}} \text{।}$$

तथैव, इ ज उ त्रिभुज एव, $\text{ज उ} = \frac{\text{इ ज} \times \text{कोज्या का}}{\text{कोज्या गा}}$

$$= \frac{\text{अ} \times \text{ज्या आ} \times \text{कोज्या का}}{\text{ज्या (का—आ) कोज्या गा}},$$

एवमेव, उ ज च त्रिभुजे, $\text{उ च} = \frac{\text{जउ} \times \text{ज्यागा}}{१}$

$$= \frac{\text{अ} \times \text{ज्या आ} \times \text{कोज्या का} \times \text{ज्या गा}}{१ \times \text{ज्या (का—आ) कोज्या गा}}$$

अनयोः प्रघातमापकरूपे

$$\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{इ उ} = \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या आ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या (का—गा)}$$

$$— \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या (का} - \text{आ)} - \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{कोज्या गा ।}$$

$$= \left\{ \begin{array}{r} +\ २\text{·}१७६०६१३ \\ +\ ९\text{·}७१६०१६८ \\ +\ ९\text{·}२४६०९९५ \\ \hline +२१\text{·}१३८१७७६ \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{r} +\ ९\text{·}३९४६७२९ \\ +\ ९\text{·}९१०४१५५ \\ \hline +१९\text{·}३०५०८८४ \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{r} +२१\text{·}१३८१७७६ \\ —१९\text{·}३०५०८८४ \\ \hline +\ १\text{·}८३३०८९२ \end{array} \right\}$$

$\therefore$ प्रघा$_{\text{द}}$इउ $=$ १·८३३०८९२ $\therefore$ इ उ = ६८.०९१ हस्ताः,

इदमेव स्तम्भौच्यम् ।

$$\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{उच} = \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या आ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{कोज्या का} +$$

$\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या गा} - १० - \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या (का} - \text{आ)} - \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{कोज्या गा},$

$$= \begin{array}{r} +\ २\text{·}१७६०६१३ \\ +\ ६\text{·}७१६०१६८ \\ +\ ६\text{·}८४४११३७ \\ +\ ६\text{·}७६४४८४६ \\ \hline +\ ३१\text{·}५००७०६७ \end{array} - \begin{array}{r} +१०\text{·} \\ +\ ६\text{·}३६४६७२६ \\ +\ ६\text{·}११०४१५५ \\ \hline +\ २६\text{·}३०५०८८४ \end{array}$$

$$= \left\{ \begin{array}{r} +\ ३१\text{·}५००७०६७ \\ -\ २६\text{·}३०५०८८४ \\ \hline २\text{·}१६५६१८३ \end{array} \right\}$$

$\therefore \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{उच} = २\text{·}१६५६३८३ \quad \therefore \text{उच} = १५६\text{·}८६८३$ हस्ताः,

इदमेव पर्वतौच्च्यम् ।

(११) प्रश्नः । यस्याः क्रमनिम्नभूमेः समानभूमौ प्रावण्यं ३६° । १५′ (आ) अंशाः यस्याश्चाधरप्रान्तो दुस्तरनद्यास्तटं भवति । तस्याः परतीरे एकं देवगृहं वर्त्तते । तस्यौच्च्यावगमाय तद्देवगृहसम्मुखमेव तत्क्रमनिम्नोर्व्या उपरितनप्रान्ते गणकेन स्थित्वा देवगृहशिखरे विद्धे लब्धा अधरांशाः ११° । ३०′ (का) । अथ स देवालयसम्मुख दिश्येव तां क्रमनिम्नभूमिं २०० (अ) हस्तमितामवरुह्य तद्भूमेरधरप्रान्तं प्राप्य पुनस्तद्देवगृहाग्रे विद्धे लब्धा उन्नतांशाः २६° । २०′ (गा), तथा सति नद्या विस्तृतिः कियती, देवगृहस्यौच्च्यं च कियदिति ।

अस्योत्तरम् ।

अत्र कल्प्यते, अ प क त नदीपात्रम् अत = नदीविस्तृतिः, अ द = परतटस्थदेवगृहौच्यम्, द = देवगृहाग्रम् त उ = प्राक् तीरस्थप्रवणभूप्रदेशः = २०० = अ, तत्र उ = उन्नतभूप्रदेशचिह्नम्, क्षितिजधरातलगता अ इ रेखा क्षितिजधरातलगतपरस्परसमानान्तर अ प, त क रेखाद्वयोपरि लम्बरूपा, त स्थानात् प्रावण्यकोणः =

∠इ त उ = ३९° । १५′ = आ, त स्थानाद्देवगृहाग्रवेधेन लब्धा उन्नतांशाः = ∠द त अ = २१ । २० = गा, द च ऊर्ध्वाधरधरातले, यत्र उ च रेखा लम्बरूपास्ति, तत्रत्य द स्थानात् उ स्थाने विद्धे ∠उ द च = उ स्थानीयोन्नतांशाः, तत्कोटिः उ स्थानादधः स्थितदेवगृहाग्रवेधेन लब्धा अधरांशाः = ∠द उ च = ११° । ३०′ = का, अत्र नदीविस्तृतेर्देवगृहोच्च्यस्य च मानमपेक्ष्यते ।

अत्रोपपत्तिः, त इ भूतलगता रेखा तत्समानान्तरं तदूर्ध्वस्थितं च यद्धरातलं तत्रत्या उ च रेखा त इ रेखयासमानान्तरा, अतोऽनयोः त इ उ च समानान्तररेखयोः त उ रेखया छिन्नत्वात् ∠इ त उ = ∠त उ च, एवं ∠त उ च — ∠द उ च = आ — का = ∠त उ द । अथ, द त उ त्रिभुजे, ∠द त उ = १८०° — (आ + गा) ।

∴ ∠ द त उ + ∠त उ द = १८०° − (आ + गा) + (आ — का)

= १८० — (का + गा), ∴ ∠त द उ

= १८०° — {१८०° — (का + गा)} = का + गा

$$\therefore \text{ उक्तत्रिभुजे, } \text{तद} = \frac{\text{त उ} \times \text{ज्या (आ—का)}}{\text{ज्या (का + गा)}}, \text{ एवं अ द त त्रिभुजे,}$$

१ : तद : : कोज्या गा : अत ।

$$\therefore \text{ अत} = \frac{\text{त उ} \times \text{ज्या (आ — का) कोज्या गा}}{१ \times \text{ज्या (का + गा)}} \text{ ।}$$

$$\text{एवं अद} = \frac{\text{त उ} \times \text{ज्या (आ—का) ज्या गा}}{१ \times \text{ज्या (का + गा)}}$$

अत्र त उ = अ ।

∴ अनयोः प्रघातमापकरूपे—

$$\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अ त} = \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या (आ—का)}$$

$$+ \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{कोज्या गा} \underset{—१०—}{} \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या (का + गा)}$$

+ २·३०१०३००
+ ९·६६८०२६५
+ ९·९४०४०९१
―――――――
+ २१·९०९४६५६
— १०·
— ९·८१५४८५४
―――――――
२·०९३९८०२ ∴ $\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अत} = २·०९३९८०२$,

∴ अ त = १२४·१६ इयं नदीविस्तृतिः ।

$$\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अद} = \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अ} + \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या (आ—का)}$$

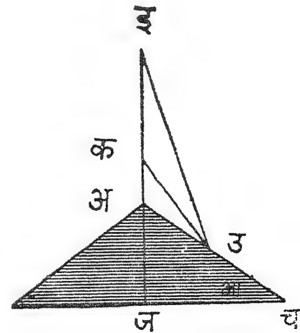
$$+ \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या गा} - १० - \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या (का+गा)}$$

+ २·३०१०३००
+ ९·९६८०२६५
+ ९·९९००९८३
+ २१·९५९१५४८
— १०·
— ९·८१५४८५४
+ १·८४३६६९४

∴ $\text{प्रघा}_{\text{द}}$अ द = १·८४३६६९४ ∴ अ द = ६९·७७ इयं देवगृहोच्छ्रितिः ।

१२ प्रश्नः । भूमौ निखनितस्य द्वात्रिंशद्धस्त (अ) परिमाणौच्च्यस्य सरल-वंशस्य मूलमभितः सर्वासु दिक्षु प्रवणआस्ते तस्य समानभूमौ प्रावण्यं किल विंशतिरंशाः (आ) । अथ तस्मिन् वंशे वात वेगेनैकदेशे भग्ने तस्याग्रं वंशमूलात् षोडश (क) हस्तान्तरे लग्नम् तथा सति वंशो मूलात् कियत्सु हस्तेषु भग्न इति ।

अस्योत्तरम् ।



अत्र प्रवणभूमौ निखनितवंशस्योच्छ्रितिः = अ इ = ३२ हस्ताः, अ, इ क्रमेण वंशमूलाग्रे, स च वंशो भग्नः सन् मूलप्रदेशात्षोडशहस्तान्तरे प्रवणभूमेः उ स्थाने लग्नः, अतः अ उ = १६ हस्ताः, प्रावण्य-कोणः = २०° = ∠अ च ज = आ, अतः कोज्या आ = ज्या (९०° — आ) = ज्या ∠च अ ज = ज्या ∠क अ उ, एवं—कोज्या आ = + कोज्या { १८०° — (९०° — आ) } = कोज्या (९०° + आ) = — ज्या आ, तथा च ज भूतलम् । अत्र द्वितीयपदगतत्वेन आ कोण कोटिज्याया ऋणत्वं ज्ञेयम् ।

$\therefore$ अ उ क त्रिभुजे (३८) प्रक्रमतः—

$$-\text{ज्या आ} = \frac{\text{अ उ}^2 + \text{अ क}^2 - \text{क उ}^2}{२\ \text{अ उ}\cdot\text{अ क}},$$

$\therefore$ क उ^2 = अ उ^2 + अ क^2 + २ अ उ. अ क. ज्या आ,

$\because$ क उ = अ इ — अ क $\therefore$ क उ^2 = अ इ^2 — २ अ इ. अ क. + अ क^2,

$\therefore$ अ इ^2 — २ अ इ, अ क + $\underline{\text{अ क}^2}$ = अ उ^2 + $\underline{\text{अ क}^2}$ + २ अ उ. अ क. ज्या आ

$\therefore$ अ इ^2 — अ उ^2 = २ अ इ. अ क + २ अ उ. अ क. ज्या आ

= अ क २ (अ इ + अ उ. ज्या आ)

$$\therefore \text{अ क} = \frac{\text{अ इ}^2 - \text{अ उ}^2}{२\ (\text{अ इ} + \text{अ उ. ज्या आ})}$$

अत्र हरे २ (अ इ + अ उ. ज्या आ) द्वितीय खण्डस्य प्रघातमापकरूपम ।

प्रघा$_{\text{द}}$अउ + प्रघा$_{\text{द}}$ज्या आ — १०

$$= \left.\begin{matrix} १\text{·}२०४१२०० \\ ९\text{·}५३४०५१७ \end{matrix}\right\} = १०\text{·}७३८१७१७$$

$$\frac{-१०\text{·}}{०\text{·}७३८१७१७}$$ अस्य

संख्या = ५·४७२ ।

$\therefore$ २ (अ इ + ५·४७२) = २ (३२ + ५·४७२)

= २ (३७·४७२) = ७४·९४४

$$\therefore \text{अ क} = \frac{\text{अ इ}^2 - \text{अ उ}^2}{२(\text{अ इ} + \text{अ उ. ज्या आ})} = \frac{१०२४ - २५६}{७४\text{·}९४४}$$

= १०·२४७६ ...... हस्ताः ।

(१३) प्रश्नः । कस्यचित्पर्वतस्य शिखरे १२० (अ) हस्तप्रमाणः प्रस्तरस्तम्भो वर्तते तत्पर्वतोपत्यकास्थेन केनचिरपुरुषेण स्तम्भमूलाग्रयोरन्तर्गतकोणे मापिते लब्धा अंशाः ९° । ४०′ (आ) ततः स्तम्भदिश्येवाग्रे २०० (क) हस्तमित समानदेशं गत्वा

पुनः स्तम्भमूलाग्रयोरन्तर्गतकोणे मापिते लब्धा स्तावन्त एवांशाः। तदा च पर्वतौच्च्यं कियदिति।

अस्योत्तरम्।

अत्र कल्प्यताम्, स भ = य = पर्वतौच्च्यम्, भ द = समानभूमिः, यत्र प्रथम-वेधस्थानम् = द, स्तम्भदिश्येव द्वितीय वेधस्थानम् = प, अतः दप = क = २००, अ = स्तम्भाग्रम्, स = स्तम्भमूलम्, अ स = अ = १२०, ∠ अ द स = ∠ अ प स = स्तम्भाग्रमूलयोरन्तर्गत कोणः = आ = ६°। ४०′ अत्र अस आधारे यत् अ द स, अ प स त्रिभुजद्वयं वृत्तान्तर्गतं वर्तते, तयोः परिधिलग्न शीर्षकोणयोः समत्वात्तत् त्रिभुजद्वयमेक वृत्तान्तर्गतं रेखागणितस्य विंशतितमप्रतिज्ञानुमानेन सिध्यति। अथ अ स रेखां च बिन्दावर्धितां कृत्वा च बिन्दौ कृतस्य च ग लम्बस्य के चिह्ने पूर्वोक्तवृत्तस्य केन्द्रं रेखागणितेन निर्धारितं वर्तते। अतः के बिन्दुतः कृते के प, के द रेखे व्यासार्द्धत्वात्तुल्ये। तथा के बिन्दुतः भ द रेखोपरि कृता केल लम्बरेखा च भ किंवा $\frac{अ}{२}$ + य, अनेन तुल्यावर्तते। अथ, अ क च केन्द्रलग्नकोणः, आ शीर्ष-कोणेन तुल्यः (रे. ग. अ. ३ प्र. १६)। अतः ज्या आ : $\frac{अ}{२}$: : १ : अ क किंवा व्यासार्द्धम्, ∴ व्यासार्द्ध = $\frac{अ}{२ \times ज्या\ आ}$, ततः के ल द जात्यत्र्यस्रे के द = व्यासा-

र्द्धम्, $\text{दल} = \frac{\text{क}}{२}$, $\therefore$ $\text{के द}^{२} - \text{द ल}^{२} = \text{क ल}^{२}$, किंवा

$$\left(\frac{\text{अ}}{२\,\text{ज्या आ}}\right)^{२} - \left(\frac{\text{क}}{२}\right)^{२} = \left(\frac{\text{अ}}{२} + \text{य}\right)^{२},$$

$$\text{मूलग्रहणेन,}\ \frac{\text{अ}}{२} + \text{य} = \sqrt{\left(\frac{\text{अ}}{२\,\text{ज्या आ}}\right)^{२} - \left(\frac{\text{क}}{२}\right)^{२}},$$

$$\text{पक्षान्तरनयनेन;}\ \ \text{य} = \tfrac{१}{२}\sqrt{\left(\frac{\text{अ}}{\text{ज्या आ}}\right)^{२} - \text{क}^{२}} - \text{अ},\ \text{इत्युपपद्यते,}$$

इदमेव पर्वतौच्यम् ।

अत्र कोष्ठकान्तर्गत प्रथम खण्डस्य प्रघातमापकरूपार्थ यदि $\left(\frac{\text{अ}}{\text{ज्या आ}}\right)^{२} =$ $\text{इ}^{२}$, कल्प्यते तदा $\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{इ} = \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{अ} - \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्या आ} + १०$

$$= \begin{cases} + \ २\cdot०७९१८१२ \\ + १० \\ - \ ९\cdot२२५०९१८ \\ \hline \quad २\cdot८५४०८६४ \end{cases} \therefore\ \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{इ} = २\cdot८५४०८६४$$

अयं इघातमापको द्विगुणः $= \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{इ}^{२} = ५\cdot७०८१७८८$, $\therefore$ $\text{इ}^{२}$ संख्या $=$

५१०७१५·१७६४७०६,

$$\therefore \left(\frac{\text{अ}}{\text{ज्या आ}}\right)^{२} - \text{क}^{२} = ५१०७१५\cdot१७६४७०६ - ४००००,$$

$$= ४७०७१५\cdot१७६४७०६$$

$$\therefore \sqrt{\left(\frac{\text{अ}}{\text{ज्या आ}}\right)^{२} - \text{क}^{२}} = ६८६\cdot०८६८$$

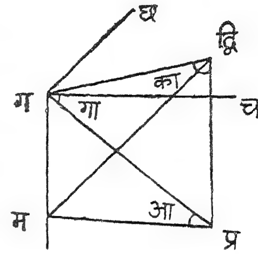
$$\therefore \tfrac{१}{२}\left\{\sqrt{\left(\frac{\text{अ}}{\text{ज्या आ}}\right)^{२} - \text{क}^{२}} - \text{अ}\right\} = २८२\cdot०४३४\cdots\cdots \text{हस्ताः},$$

इदमेव पर्वत्तौच्च्यमानमिति ।

१४ प्रश्नः । हस्तशतो (अ) च्छ्रयस्य राजसदनस्योपरिभागे स्थितो गणकः समभुवि दुर्गमस्थाने वर्तमानयोर्वृक्षयोरन्तरं जिज्ञासु स्तन्मूलयोरधरांशमाने २° ।

५६′ (आ), ३° । ११′ (क) एतावती अवगम्य तयोरेवान्तर्गतकोणं ९° । ४१′ (गा) अंशमितं दृष्टवान् । तदा च तयोर्वृक्षयोरन्तरं कियदिति ।

अस्योत्तरम् ।



अत्र कल्पताम् ग म = राजसदनोच्छ्रितिः = अ = १००, प्र = प्रथमवृक्षमूलम्, द्वि = द्वितीयवृक्षमूलम्, अत्र म प्र, मद्वि भूतलस्थरेखा द्वयोपरि ग म रेखाया लम्बत्वेन ग म प्र, ग म द्वि जात्यत्र्यस्रे भवतः। अत्राधरांशद्योतनाय म प्र भूतलस्थरेखा समानान्तरा ग बिन्दुतः ग च रेखा कृतास्ति । अतः ग स्थानात् प्र वृक्षमूल स्थाने विद्धे ∠प्र ग च = ∠ग प्र म = ३° । ५६′ = आ अधरांशाः । एवं म द्वि भूतलस्थरेखा समानान्तरा ग बिन्दुतः ग छ रेखा कृतास्ति । अतः ग स्थानात् द्वि वृक्षमूले विद्धे ∠द्वि ग छ = ∠ग द्वि म = ३° । ११′ = का अधरांशाः । एवं वृक्षमूलान्तर्गतकोण = ∠प्र ग द्वि = ९° । ४१′ = गा, वृक्षमूलान्तरम् = म प्र, प्र म द्वि = भूतलम् । अत्रोपपत्तिः—

अथ ग म प्र जात्ये ग प्र = $\frac{\text{ग म} \times १}{\text{ज्या आ}}$, तथा ग म द्वि जात्ये ग द्वि = $\frac{\text{ग म} \times १}{\text{ज्या का}}$ ततः प्रद्वि वृक्षमूलान्तरज्ञानाय ३८ प्रक्रमानुसारं

ग प्र द्वि त्रिभुजे, $\frac{\text{ग प्र}^२ + \text{ग द्वि}^२ - \text{प्र द्वि}^२}{२ \text{ ग प्र. ग द्वि}} = \text{कोज्या गा}$ ।

$\therefore \text{ग प्र}^२ + \text{ग द्वि}^२ - \text{प्र द्वि}^२ = \text{कोज्या गा} \times २ \text{ ग प्र. ग द्वि}$ ।

$\therefore \text{प्र द्वि}^२ = \text{ग प्र}^२ + \text{ग द्वि}^२ - \text{कोज्या गा} \times २ \text{ ग प्र. ग द्वि}$ ।

$$= \frac{\text{ग म}^२}{\text{ज्या}^२ \text{ आ}} + \frac{\text{ग म}^२}{\text{ज्या}^२ \text{ का}} - \frac{\text{कोज्या गा} \times २ \text{ ग म}^२}{\text{ज्या आ. ज्या का}}$$

$$= \text{ग म}^२ \left(\frac{१}{\text{ज्या}^२ \text{ आ}} + \frac{१}{\text{ज्या}^२ \text{ का}} - \frac{२ \text{ कोज्या गा}}{\text{ज्या आ. ज्या का}} \right)$$

$$\therefore \text{प्रद्वि} = \text{ग म} \sqrt{\text{को छे}^२ \text{आ} + \text{को छे}^२ \text{का} - २ \text{को छेआ. कोछेका. को ज्यागा}}$$

$$= \text{अ}\sqrt{\frac{१}{\text{ज्या}^{२}\,\text{आ}} + \frac{१}{\text{ज्या}^{२}\,\text{का}} - २\,\text{कोज्या गा} \times \frac{१}{\text{ज्या आ. ज्या का}}}$$

अत्र हस्तादिमानानयनार्थ 'चेम्बर्स' सारिणीतः प्रघातमापकरूपायास्य खण्ड-चतुष्टयं कृतम्। अ, $\frac{१}{\text{ज्या}^{२}\,\text{आ}}$, $\frac{१}{\text{ज्या}^{२}\,\text{का}}$, $\frac{२\,\text{कोज्या गा}}{\text{ज्या आ. ज्या का}}$ ।

$$\frac{१}{\text{ज्या}^{२}\,\text{आ}} = \text{क}, \quad \frac{१}{\text{ज्या}^{२}\,\text{का}} = \text{ग}, \quad \frac{२\,\text{कोज्या गा}}{\text{ज्या आ. ज्या का}} = \text{घ}$$

$\therefore$ प्र घा$_{\text{द}}$क $=$ २०—प्र घा$_{\text{द}}$२ ज्या आ। प्र घा$_{\text{द}}$ग $=$

२०—प्रघा$_{\text{द}}$२ ज्या का

प्र घा$_{\text{द}}$घ $=$ प्र घा$_{\text{द}}$२ $+$ प्रघा$_{\text{द}}$ कोज्या गा $+$ १०

—प्रघा$_{\text{द}}$ज्या आ—प्रघा$_{\text{द}}$ज्या का।

$\therefore$ प्र घा$_{\text{द}}$क $=$ २०—२ (८·७०९०४९०) $=$ २०—१७·४१८०९८०

$=$ २·५८१९०२० $\therefore$ क $=$ ३८१·८५८१

प्र घा$_{\text{द}}$ग $=$ २०—२ (८·७४४५३६०) $=$ २०—१७·४८९०७२०

$=$ २·५१०९२८० $\therefore$ ग $=$ ३२४·२८५८

प्र घा$_{\text{द}}$घ $=$ ·३०१०३०० $+$ ९·९६३७६७९ $+$ १० — ८·७०९०४९०

—८·७४४५३६०

$=$ २०·२६४७९७९ — १७·४५३५८५० $=$ २·८४१२१२९

$\therefore$ घ $=$ ६९३·७६५८।

$\therefore$ प्रद्वि $=$ अ$\sqrt{\text{क}+\text{ग}-\text{घ}}$

$=$ १००$\sqrt{३८१·८५८१ + ३२४·२८५८ - ६९३·७६५८}$

$=$ १००$\sqrt{७०६·१४३९ - ६९३·७६५८}$

$=$ १००$\sqrt{१२·३७८१}$ $=$ १०० $\times$ ३·५१८५

$=$ ३५१·८५............।

(१५) प्रश्नः। एका पूर्वापराऽन्या याम्योत्तरा चेति द्वे भित्ती द्वादश (अ) हस्तोच्छ्रिते स्तः। तत्र यदा पूर्वापरायाभित्तेरुत्तरपार्श्वे छाया हस्तचतुष्क (क) विस्तृता याम्योत्तरायाश्च पश्चिमपार्श्वे छाया हस्तत्रय (ग) विस्तृता स्यात्, तदा रवेरुन्नतिः कियती दिगंशाश्च कियन्त इति।

अस्योत्तरम्।

अत्र रवेर्दिगंशोन्नतांशवशात्कस्यचिदायतघनक्षेत्राकार भित्त्यादिपदार्थस्य छाया विषमकोण समानान्तरचतुर्भुजाकारा यदा भूमौ पतति, तदा पूर्वापरायत भित्तेस्तत्पश्चिमपार्श्वे संलग्नदक्षिणोत्तरायतभित्तेश्च छायाग्रद्वयसंयोगेन तथैकमायत-क्षेत्रं भूमौ संलक्ष्यते, यस्यैको भुजः पूर्वापरायतभित्तिच्छायाविस्तृतिरूपः, अपरश्च दक्षिणोत्तरायतभित्तिच्छायाविस्तृतिरूपो भवति। यथोपरि निर्दिष्टक्षेत्रे इ छ च घ, आयत क्षेत्रं दृश्यते। एतत्सर्वं पूर्वं सम्प्रधार्यम्। ततः कल्प्यताम्, (अ) द्वादशहस्तो-च्छ्राया (य) हस्तविस्तृता च पूर्वापरायत भित्तिः। यस्याः पू, अ, इ, उ, भूलग्न-बिन्दवः कल्प्याः, यस्या उत्तरपार्श्वे विषमकोण समानान्तर चतुर्भुजाकारा छाया अ, ज, छ च, इ मिता भूमौ पतितास्ति, जात्य त्र्यस्राकारे इ च छ छायाग्रे इ छ= क=४ (भुजः)=तच्छायाविस्तृतिः। एवमुक्तभित्तेः पश्चिमपार्श्वे संलग्ना (अ) द्वादशहस्तोन्नता (य) हस्तविस्तृतैवान्या दक्षिणोत्तरायतभित्तिः, यस्याः प, द, उ, त

भूसंलग्न बिन्दवः कल्प्याः, विषमकोण समानान्तरचतुर्भुजाकारा संलग्न भित्तिद्वयच्छाया इ, त, ख, च, इ मिता भूमौ पतितास्ति, जात्यत्र्यस्राकारे इ घ च छायाग्रे इ ध तच्छायाविस्तृतिः = ग = ३ (कोटिः), अतः छायाग्रद्वय संयोगरूपा इ च रेखा = $\sqrt{क^2 + ग^2}$ = ५ कर्णः । अत्र इ घ संलग्न भित्तिद्वयच्छाया विस्तृतिः उ थ दक्षिणोत्तरायतभित्तिच्छाया विस्तृतितुल्यैव भवति । यतो हि दक्षिणोत्तरायत भित्तिरसंलग्ना चेत्तच्छाया त, ख, ध, उ मिता भवेत् । अतस्तच्छायाविस्तृतिः उ थ = इ घ क्षेत्रे स्फुटं दृश्यते ।

अथ पूर्वापरवृत्तादृग्वृत्तान्तर्गतकोणो दिगंशकोणो भवति । तज्ज्या दिग्ज्या पूर्वापरसूत्रे लम्बरूपा भुजः, लम्बमूलात्केन्द्रावधि पूर्वापर सूत्रखण्डं दिगंश कोटिज्या कोटिः, त्रिज्या कर्णश्चैतत्प्रसिद्धगोलीयजात्यं पूर्वोक्तेन इ च घ जात्येन सजातीयम् । यतोऽत्र इ घ पूर्वापर वृत्तधरातलम्, इ च दृग्वृत्तधरातलम्, तदुत्पन्नः ∠ च इ घ कोणो दिगंश कोणः । ∴ इ च : १ : : च घ : ज्यादिगंश,

$$\therefore \text{ज्यादिगंश} = \frac{१ \times \text{च घ}}{\text{इ च}} = \frac{\text{क}}{५}$$, यतोऽत्र इ छ = च थ = क । अस्य प्रघात मापकस्वरूपम्,

$$\text{प्रघा}_{\text{द}}\text{ज्यादिगं} = \text{प्रघा}_{\text{द}}\text{क} + १० - \text{प्रघा}_{\text{द}}५ = १०\cdot६०२०६०० - \cdot६९८९७००$$

$$= ९\cdot९०३०९०० \text{, अस्य चापः} = \text{ज्या} \frac{-१\ \text{क}}{\sqrt{\text{क}^2 + \text{ग}^2}} = ५३^\circ \mid ७' \mid ४८'' \mid$$

अतः पूर्वकपाले दक्षिणादिगंशाः = ज्या $^{१}\frac{\text{क}}{५}$,

= ५३° । ७′ । ४८″ । अत्रेदमवधेयम् —

पूर्वापरवृत्ततो दृग्वृत्तं यस्यां दिशि भवति तद्दिश्या दिगंशा भवन्ति छाया च तद्विरुद्धदिगभिमुखी भवतीति नियमेन प्रस्तुतोदाहरणे पूर्वापरवृत्ततो दक्षिणस्यां दिशि दृग्वृत्तं वर्तते, छायाचोत्तरपार्श्वे पतितास्त्यतोऽत्र दक्षिणादिगंशाः । याम्योत्तरभित्तिच्छाया तु पश्चिम पार्श्वेनिर्दिष्टास्त्यतोऽत्र पूर्वकपालं ज्ञेयम् ।

अथोन्नतांशज्ञानार्थं उक्त क्षेत्रे इ च भुजः, ऊर्ध्वाधरा द्वादशकोटिः, अनयोर्वर्गयोगपदं कर्णः एवं दृग्ज्या भुजः, उन्नतांश ज्या शङ्कुः कोटिः, त्रिज्याकर्णः,

अनयोः क्षेत्रयोः साजात्यं प्रसिद्धमतः, इ च : १२ : : दृग्ज्या : ज्या उन्न.,

$$\therefore \frac{१२}{इ\ च} = \frac{ज्या\ उ\ न्न.}{दृग्ज्या} = स्प.\ उन्न.$$ । अस्य प्रघातमापकरूपं यथा,

$$प्रघा_{द}\ स्प\ उन्न = प्रघा_{द}१२ + १० - प्रघा_{द}५$$

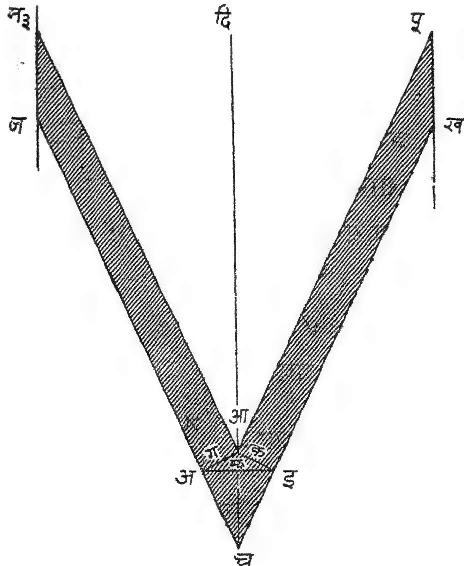
$$= १\cdot०७६१८१२ + १० - \cdot६६८६७००$$

$$= १०\cdot३८०२११२$$ एतच्चापः $= ६७^{\circ} । २२' । ४८''$

$$\therefore उन्नतांशाः = स्प^{-१} \frac{१२}{\sqrt{क^{२} + ग^{२}}}$$

$= ६७^{\circ} । २२' । ४८''$। अत्रेदमनुसन्धेयम् दक्षिणोत्तरभित्तिः पूर्वापरभित्तेः पूर्वभागे संलग्ना चेत्तत्रोक्तायतक्षेत्राभावेऽपि छायाद्वयविस्तृतिज्ञानादुक्तप्रकारेणैव दिगंशादिकं ज्ञातं भवतीति ।

(१६) प्रश्नः । एका पूर्वापरा द्वादश (अ) हस्तोच्छ्रया भित्तिरस्ति । तस्याः पश्चिमप्रान्ते लग्ना पूर्वदिक् चिह्नात् ६७°। ३७′ (आ) अंशान्तरे उत्तरभागे गताऽन्या भित्तिरस्ति सापि द्वादशहस्तोच्छ्रया । यदा तयोर्भित्त्योश्छाये तद्बहिर्भाग एव तथा सञ्जाते यथा पूर्वापरायाश्छाया हस्तत्रय (क) विस्तृतास्यादन्यस्याश्च हस्तचतुष्क (ग) विस्तृता भवेत् । तदा रवेरुन्नतिः कियती दिगंशाश्च कियन्त इति ।



अस्योत्तरम् ।

अत्र कल्प्यताम्, पू $म_{२}$ (अ) द्वादशहस्तोन्नता पूर्वापरायता भित्तिः, यस्याः पूर्वापरदिक्कौ क्रमेण $म_{१}$, $म_{२}$ भूसंलग्नावाद्यन्त बिन्दू कल्प्यौ, यस्याः $म_{१}$, ख, इ, च, $म_{२}$ भित्ताच्छाया दक्षिणदिशि भूमौ पतितास्ति, भित्तितो रवेरुत्तरतः स्थितत्वात्, एवं तच्छायाविस्तृतिः $म_{२}$ इ = क = ३, छायाग्रं = इ च $म_{२}$, तथोक्तभित्तेः

पश्चिमप्रान्ते लग्ना पूर्वदिक् चिह्नात् ६७° । ३०′ (आ) अंशान्तरे उत्तरभागे गतान्या (अ) द्वादशहस्तोच्छ्रितैव भित्तिरस्ति, यस्याः पूर्वापरदिश्यौ क्रमेण म$_{३}$, म$_{२}$ भूलग्नावाद्यन्त बिन्दू कल्प्यौ, यस्याः म$_{३}$ ज, अ, च, म$_{२}$ मिता छायोत्तरदिशि पतितास्ति, रवेर्भित्तितो दक्षिणतः स्थितत्वात् । एवं तच्छायाविस्तृतिः म$_{२}$ अ = ग = ४, छायाग्र च = अ च म$_{२}$, अत्र म$_{२}$ बिन्दुतः ज च रेखोपरि म$_{२}$ अ लम्बस्तथा ख च रेखपरि म$_{२}$ इ लम्बः कृतोऽस्ति । येन, ∠च अ म$_{२}$, ∠च इ म$_{२}$ सम्मुख कोणयोः प्रत्येकस्य नवत्यंशमितत्वात् च अ म$_{२}$ इ चतुर्भुजं वृत्तान्तर्गतं भवति, एव यतः ∠ इ च अ = आ, अतः ∠ अ म$_{२}$ इ = १८०° — आ । अत्र अ इ रेखा कार्या । ततः ३८ प्रक्रमेण, — को ज्या आ = $\frac{क^{२} + ग^{२} — अ इ^{२}}{२ क ग}$, अतः

अ इ = $\sqrt{क^{२} + ग^{२} + २ क ग. को ज्या आ}$ । अत्र म$_{१}$, म$_{२}$ पूर्वापर वृत्तधरातलम्, च म$_{२}$ दि दृग्वृत्तधरातलम्, अनयोरन्तर्गतः ∠ म$_{१}$ म$_{२}$ दि, दिगंशकोणोऽस्ति । स च रेखागणितप्रथमाध्यायस्याष्टाविंशतितम प्रतिज्ञया ∠ इ च म$_{२}$ कोणेन तुल्यः, ∠ इ च म$_{२}$ कोणस्तु रेखा गणित तृतीयाध्यायस्य विंशतितमप्रतिज्ञया ∠ म$_{२}$ अ इ कोणेन दिगंशकोणेन वा तुल्यः, अतः अ म$_{२}$ इ त्रिभुजे,

अ इ : ज्या आ : : क : ज्या ∠ म$_{२}$ अ इ, ∴ ज्या दिगंश =

$$\frac{क \times ज्या आ}{\sqrt{क^{२} + ग^{२} + २ क ग. कोज्या आ}}$$

अत्र हरस्वरूपम् = $\sqrt{३^{२} + ४^{२} + २ \times ३ \times ४ \times कोज्या आ}$ । इतोऽग्रे चेम्बर्स सारणीतः स्वाभाविक ज्यादिभिरेव गणितं प्रदर्श्यते । यत्र गुणनादिकार्यं स्वाभाविक संख्यावदेव कर्तव्यं भवति ।

यथा, ह^{२} = २५ + २४ × ·३८२६८३४ (स्वाभाविकी कोज्या आ),

∴ ह = $\sqrt{३४·१८४४०१६}$ = ५·८४६७४······।

अत्रस्वाभाविकी ज्या आ = ·६२३८७६५ ।

∴ दिगंश ज्या = $\frac{क \times ज्या आ}{५·८४६७\cdots}$ = $\frac{·६२३८७९५ \times ३}{५·८४६७४}$

= ·४७४०४८४ एतच्चापः = २८° । १७′ । ५१″ । ∴ पूर्वकपाले उत्तरादिगंशाः = ज्या$^{-१}$ $\frac{क \times ज्या आ}{हरः}$ = २८° । १७′ । ५१″ ।

यतोऽत्र पूर्वापरवृत्ततो दृग्वृत्तमुत्तरस्यां छाया च दक्षिणदिगभिमुखी, अतोऽत्रोत्तरादिगंशाः, पूर्वापरायतभित्तिच्छायाग्रं पश्चिमायां दिशि वर्ततेऽतोऽत्र पूर्वं कपालं ज्ञेयम् ।

अथोन्नतांशज्ञानार्थं, इ च $म_२$ त्रिभुजे छायाग्रद्वयसंयोगरूपा च $म_२$ रेखा भुजः, द्वादश कोटिः, अनयोर्वर्गयोगपदं कर्णः, इदं क्षेत्रं दृग्ज्या भुजः उन्नतांश ज्या कोटिः, त्रिज्या कर्णश्चेति प्रसिद्ध गोलीयक्षेत्र सजातीयम् । अत्र च $म_२$ भुजज्ञानार्थं, इ च $म_२$ त्रिभुजे, ज्या ∠इ च $म_२$ किंवा ज्या दिगंश : क : : १ : च $म_२$,

$$\therefore \text{च } म_२ = \frac{१ \times क}{\text{ज्या दिगंश}} \text{ । अथ स्प उन्नतांश} = \frac{\text{ज्या उन्नतांश}}{\text{दृग्ज्या}} = \frac{१२}{\text{च } म_२}$$

$$\frac{१२ \times \text{ज्या दिगंश}}{क} = \frac{१२ \times \cdot ४७४०४८४}{३} = १\cdot ८९६१९३६,$$

एतच्चापः $= ६२^\circ$ । ११′ । ३९″, ∴ उन्नतांश =

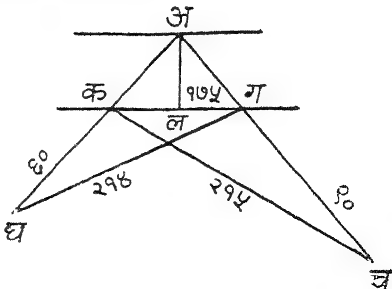
$$\text{स्प}^{-१} \frac{अ \times \text{ज्या आ}}{\sqrt{क^२ + ग^२ + २ \text{ क ग} \cdot \text{कोज्या आ}}}$$

$$= ६२^\circ \text{ । } ११' \text{ । } ३९'' \text{ ।}$$

(१७) प्रश्नः । कश्चनगणकः कोणमापकयन्त्रविरहितोऽपि केवलयष्टयैव दुस्तरनद्याः पात्रप्रमाणं जिज्ञासुरर्वाक्तीरे (क ग) सरल प्रदेशं १७५ पञ्चसप्तत्युत्तरशतहस्तमित्तं परिमाय परतीरस्थं (अ) चिह्नं (क) स्थानाद्यस्यां दिशि वर्तते तद्विरुद्धदिशि (क ध) प्रदेशं षष्टिहस्तमितं मापयित्वा (ग घ) प्रदेशे परिमापिते लब्धा हस्ताः २१४ ततः (ग) स्थानाद्यस्यां दिशि (अ) चिह्नं वर्तते तद्विपरीतदिशि (ग च) प्रदेशं ९० हस्तमितं परिमाय (क च) प्रदेशे मापिते लब्धा हस्ताः २१५ । तथा च तन्नद्याः पात्रप्रमाणं कियदिति ।

अस्योत्तरम् ।

कल्प्यते अर्वाक् तीरस्थः सरल प्रदेशः क ग = १७५, क घ = ६०, ग घ = २१४, ग च = ९०, क च = २१५, एभ्यः अल प्रमाणो नद्या विस्तारोऽपेक्ष्यः ।



अत्र, ∠ अ ग क = अ कल्प्यते, तदा ∠ क ग च = १८०° — अ,

$\therefore$ — कोज्या ∠ क ग च = —कोज्या (१८०°—अ) = +कोज्या अ, ततः

३८ प्रक्रमानुसारं, +कोज्या ∠ क ग च = $+\frac{\text{क च}^2-\text{क ग}^2-\text{ग च}^2}{\text{२ क ग. ग च}}$

$=\frac{(२१५)^2-(१७५^2+६०^2)}{२\times१७५\times६०}=\frac{७५००}{२१५००}=\cdot२३८०६५२$

=स्वाभाविकी अ कोण कोटिज्या, एतच्चापः =

७६° । १३′ । ३३″ = ∠ अ ग क ।

एवमेव ∠ अ क ग = क कल्प्यते, तदा ∠ ग क घ = १८०° − क,

$\therefore$ — कोज्या ∠ ग क घ = —कोज्या (१८०° —क) = +कोज्या क,

$\therefore$ + कोज्या ∠ ग क घ = $\frac{\text{घ ग}^2-\text{क घ}^2-\text{क ग}^2}{\text{२ क घ. क ग}}$

$=\frac{(२१४)^2-(६०^2+१७५^2)}{२\times६०\times१७५}$

$=\frac{११५७१}{२१०००}=\cdot५५१$ =स्वाभाविकी क कोण कोटिज्या, एतच्चापः

=५६°।३३′।५२″ = ∠अ क ग,

$\therefore$ ∠अ ग क + ∠अ क ग = ७६° । १३′ । ३३″+५६° । ३३′ । ५२″

=१३२° । ४७′ २५′, $\therefore$ ∠क अ ग = ४७° । १२′ । ३५″

$\therefore$ अ ग = $\frac{१७५\times\text{ज्या}\ (५६°\ ।\ ३३'\ ५२'')}{\text{ज्या}\ (४७°\ ।\ १२'\ ।\ ३५''}$

$\therefore$ अ ग ल त्रिभुजेऽनुपाततः

अ ल = $\frac{१७५\times\text{ज्या}\ (५६°\ ।\ ३३'\ ।\ ५२'')\ \text{ज्या}\ (७६°\ ।\ १३'\ ।\ ३३'')}{१\times\text{ज्या}\ (४७°\ ।\ १२'\ ।\ ३५'')}$

$\therefore$ प्रघातमापकरूपम्—

प्रघा$_{\text{द}}$अ ल = प्रघा$_{\text{द}}$ १७५ + प्रघा$_{\text{द}}$ ज्या (५६° । ३४′) + प्रघा$_{\text{द}}$ ज्या

(७६° । १४′) — १० — प्रघा$_{\text{द}}$ज्या (४७° । १३′)

$$=\begin{cases} +\ २\cdot२४३०३८० \\ +\ ९\cdot६२१४४०६ \\ +\ ९\cdot९८७३४१३ \\ \hline +२२\cdot१५१८१९९ \end{cases} \qquad \begin{array}{r} -१०^{\circ} \\ -\ ९\cdot८६५६५३१ \\ \hline -१९\cdot८६५६५३१ \end{array}$$

$$=(\ +२२\cdot१५१८१९९-१९\cdot८६५६५३१\ )=२\cdot२८६१६६८$$

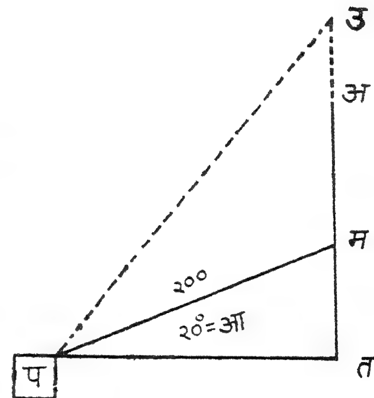
अस्य संख्या = १९३·२७१, ∴ अ ल = १९३·२७१ हस्ताः.

इदमेव पात्रप्रमाणम् ।

(१८) प्रश्नः । यस्याः समानभूमौ प्रावण्यं विंशतिः २०° (आ) अंशास्तादृश्याः क्रमनिम्नभूमेरुपरितनभागेऽस्ति शत (अ) हस्तोच्छ्रयः कश्चनतरुः । तस्य सम्मुखदेश एव क्रमनिम्नमौर्व्या अधस्तनभागे वृक्षाद्धस्तशतद्वया (क)न्तरेऽस्त्येकोदकपूर्णा वापी । अथ तद्वृक्षाग्रभागस्थयोर्वानरयोरेकस्तत उत्तीर्य वापीमगादपरश्च ततः किञ्चिदुड्डीय कर्णमार्गेण तामगात् । तथा च तयोर्गत्योः समत्वे उड्डीयमानं कियदिति ।

अस्योत्तरम् ।

कल्प्यतेऽत्र क्रमनिम्नायाः म प त भूमेरुच्चप्रदेशे म स्थाने स्थितस्य हस्तशतोच्छ्रितस्य म अ वृक्षस्य मूलं = म, अग्रम् = अ । वृक्षमूलप्रदेशात् प स्थाने हस्तशतद्वयान्तरे काचिद्वापी । अ अग्रस्थानस्थयोर्वानरयोरेकतरो वृक्षादवतीर्य प्रवणभूम्याश्रयतएव वापी गतः । अन्यतरश्च किञ्चिदुड्डीय कर्णगत्या तां वापीं गतः । द्वयोर्वानरयोर्गती यदि समाने कल्प्येते तदोड्डीनमान कियदिति प्रश्नः अ म = अ, म प = क, अ उ = य,



प्रश्नानुसारतः अ म + म प = प उ + अ उ ∴ प उ = म प + अ म − अ उ ।

प्रावण्यकोणः ∠ म प त = २०° = आ ∴ ∠ प म त = ९०° − आ = ७०°,

∴ ∠ प म उ = १८०° − (९०° − आ) = ९०° + आ,

एवं कोज्या (९०° + आ) — ज्या आ ।

अथ (३८) प्रक्रमतः कोज्या ∠ प म उ = −ज्या आ,

$\therefore$ +ज्या आ = $\frac{\text{प उ}^2 - \text{प म}^2 - \text{म उ}^2}{\text{२ प म.म उ}}$,

$\therefore$ प उ^2 = म प^2 + म उ^2 + २ ज्या आ.म प. म उ । किन्तु

प उ = म प + अ म − अ उ $\therefore$ प उ^2 = (म प + अ म − अ उ)^2

= म प^2 + अ म^2 + अ उ^2 + २प म.अ म − २प म.अ उ

−२अ म.अ उ ...... (च)

= म प^2 + म उ^2 + २ ज्या आ.म प.म उ

= म प^2 + (अ उ + अ म)^2 + २ ज्या आ.म प (अ उ + अ म)

= म प^2 + अ उ^2 + अ म^2 + २अ उ.अ म + २ज्या आ.म प

× (अ उ + अ म) ...... (छ)

$\therefore$ (च), (छ) अनयोः साम्यकरणेन,

२म प.अ म − २म प.अ उ − २अ म.अ उ

= २अ उ.अ म + २ ज्या आ.म प (अ उ + अ म)

= २अ उ अ म + २ ज्या आ.म प.अ उ + २ ज्या आ. म प.अ म

$\therefore$ २ प म.अ म − २ ज्या आ.म प.अ म

= २ अ उ.अ म + २ प म.अ उ + २ अ म.अ उ + २ ज्या आ.म प.अ उ

= ४ अ उ.अ म + २ प म.अ उ + २ ज्या आ.म प.अ उ ।

$\therefore$ २ अ म (म प − ज्या आ. म प)

= अ उ (४ अ म + २ म प + २ ज्या आ.म प)

किंवा २ अ म.म प (१ − ज्या आ)

= अ उ { ४अ म + २म प (१ + ज्या आ) }

$\therefore$ अ उ = उड्डीनमानम् = $\frac{\text{अ म. म प (१ − ज्या आ)}}{\text{२ अ म + म प (१ + ज्या आ)}}$

= $\frac{\text{अ. क (१ − ज्या आ)}}{\text{२ अ + क(१ + ज्या आ}}$

अस्य गणितं स्वाभाविकज्यया प्रदर्श्यते । तत्र आकोणस्य स्वाभाविकी ज्या = ·३४२०२०१ ।

ततः, उड्डीनमानम् $=$ अ उ $=$ य $= \dfrac{\text{अ. क} (१ - \text{ज्या आ})}{२\,\text{अ} + \text{क} (१ + \text{ज्या आ})} =$

$= \dfrac{१०० \times २०० (१ - \cdot३४२०२०१)}{२ \times १०० + २०० (१ + \cdot३४२०२०१}$

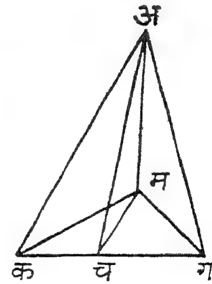
$= \dfrac{२०००० (\cdot६५७९७९९)}{२०० + २०० + २०० (\cdot३४२०२०१)} = \dfrac{१३१५९\cdot५६८००}{४६८\cdot४०४०२}$

$=$ २८$\cdot$०९४५४५ हस्ताः ।

(१९) प्रश्नः सरलवंशस्याग्रे (अ) हस्तदैर्घ्यस्य समानप्रदेशस्य प्रान्तयोः प्रत्येक स्थित्वा विद्धे लब्धास्तुल्या एव (आ) सङ्ख्याका उन्नतांशाः तस्य च मध्य-भागे स्थित्वा वंशाग्रे विद्धे लब्धा (का) उन्नतांशाः । तथा च तस्य वंशस्योच्छ्रितिः कियती प्रदेशमध्यस्थानाद्दूरत्वं च कियदिति ।

अस्योत्तरम् ।

अत्र कल्प्यते क ग $=$ सरलप्रदेशः $=$ अ, म अ $=$ वंशः, यस्य मूलबिन्दुः $=$ म अग्रबिन्दुः $=$ अ, क ग प्रदेशस्य मध्यप्रदेशः $=$ च बिन्दुः ।



$\angle$म क अ $= \angle$म ग अ $=$ आ । $\angle$म च अ $=$ का,
$\angle$क म अ $= \angle$ ग म अ $= \angle$च म अ $= ९०^\circ$,
सरल भूमितलोपरि वंशस्य लम्बरूपत्वात् ।

म अ $=$ वंशः $=$ या ।

$\therefore \dfrac{\text{या. कोज्या आ}}{\text{ज्या आ}} =$ क म,

अत्र अ क म, अ ग म त्रिभुजयोर्मिथस्तुल्यत्वेन क म ग त्रिभुजस्य क म, ग म भुजयोस्तुल्यत्वमुपपद्यते । एवं क म ग त्रिभुजान्तर्गतयोः क म च, ग म च त्रिभुजयोर्मिथस्तुल्यत्वेन क ग रेखोपरि च म रेखा लम्बरूपा सिद्ध्यति ।

$\therefore$ च म$^२ =$ क म$^२ - \left(\dfrac{\text{क ग}}{२}\right)^२ = \dfrac{\text{या.}^२ \text{ कोज्या}^२ \text{ आ}}{\text{ज्या}^२ \text{ आ}} - \dfrac{\text{क ग}^२}{४}$

$$= \frac{\text{या}^2 \text{ कोज्या}^2 \text{ आ} \times 4 - \text{ज्या}^2 \text{ आ. क ग}^2}{4 \text{ ज्या}^2 \text{ आ}}$$ । एवं अ म च त्रिभुजे

$$\text{च म} = \frac{\text{या} \times \text{कोज्या का}}{\text{ज्या का}} \therefore \text{च म}^2 = \frac{\text{या}^2 \times \text{कोज्या}^2 \text{ का}}{\text{ज्या}^2 \text{ का}}$$ ।

$$\therefore \frac{\text{या}^2 \text{ कोज्या}^2 \text{ आ} \times 4 - \text{ज्या}^2 \text{ आ. क ग}^2}{4 \text{ ज्या}^2 \text{ आ}} = \frac{\text{या}^2 \times \text{कोज्या}^2 \text{ का}}{\text{ज्या}^2 \text{ का}}$$

$\therefore$ छेदगमेन, या.^{2} ४ कोज्या^{2} आ. ज्या^{2} का—ज्या^{2} आ. ज्या^{2} का. क ग^2

= या^{2} × ४ ज्या^{2} आ. कोज्या^{2} का

$\therefore$ पक्षान्तरनयनेन, या.^{2} ४ कोज्या^{2} आ. ज्या^{2} का—या^{2}. ४ ज्या^{2} आ. कोज्या^{2} का

= ज्या^{2} आ. ज्या^{2} का. क ग^2

अत्र प्रथमपक्षः = ४ या^{2} (कोज्या^{2} आ. ज्या^{2} का—ज्या^{2} आ. कोज्या^{2} का)

= ४ या^{2} (कोज्या आ. ज्या का × ज्या आ. कोज्या का) ×
(कोज्या आ. ज्या का—ज्या आ. कोज्या का)

= ४ या^{2} { ज्या (आ + का) } { ज्या (आ—का) } १६, प्रक्रमेण,

ततः पक्षयोरव्यक्तगुणकविभाजनेन मूलग्रहणेन च

$$\text{या} = \frac{\text{क ग. ज्या आ. ज्या का}}{2\sqrt{\text{ज्या (आ + का) ज्या (आ—का)}}}$$

$$= \frac{\text{अ. ज्या आ. ज्या का}}{2\sqrt{\text{ज्या (आ + का) ज्या (आ—का)}}}$$ = वंशोच्छ्रितिः ।

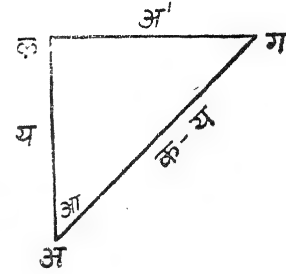
एवं च म अस्योन्मितौ या मानोत्थापनेन, चम = दूरत्वम्

$$= \frac{\text{अ. कोज्या का. ज्या आ}}{2\sqrt{\text{ज्या (आ + का) ज्या (आ—का)}}}$$ ।

(२०) प्रश्नः । अ क ग सञ्ज्ञकेषु त्रिषु स्थानेषु (अ) स्थानात् (क) स्थानं प्राच्यां दिशि वर्तते, (ग) स्थानं च प्राक्चिह्नतो दक्षिणभागे (अ) अंशान्तरे वर्त्तते । अथ (क ग) स्थानयोरन्तरप्रदेशः (अ) हस्तमितोऽस्ति । किन्तु

तस्य दुर्गमत्वात्कस्मिंश्चिन्मनुजे (क) स्थानात् (अ) स्थानं गत्वा ततः (ग) स्थानं याते तेन (क) हस्तमितः प्रदेशोऽतिक्रम्यते। तथा च (क) स्थानात् (अ) स्थानं कियद्दूरे, (अ) स्थानाच्च (ग) स्थानं कियद्दूरे वर्तत्त इति।

अस्योत्तरम्।



अ, क, ग त्रीणि स्थानानि कल्प्यन्ते। तत्र अ स्थानात् क स्थानं प्राच्यां वर्तते। अ स्थानात् ग स्थानं च आ अंशान्तरे क स्थानतो दक्षिणभागे अ हस्तमितान्तरे तिष्ठति। ग स्थानं प्राप्यमस्ति। किन्तु क स्थानाद् दक्षिणगमनमशक्यमतो ग स्थानं लिप्सुर्जनः क स्थानात् अ स्थानं प्रत्यक् गत्वा आ अंशान्तरेण चलितो ग स्थानं लब्धवान्।

तस्य चलन प्रदेशः अ क + अ ग = क। $\because$ अ क = य, $\therefore$ अ ग = क—य।

$$(३८) \text{ प्रक्रमतः कोज्या आ} = \frac{\text{य}^२ + (\text{क}—\text{य})^२ — \text{अ}'^२}{२\text{य} (\text{य}—\text{क})}$$

$$\therefore २\text{य} (\text{क}—\text{य}) \text{ कोज्या आ} = \text{य}^२ + (\text{क}—\text{य})^२ — \text{अ}'^२$$

$$\therefore \text{अ}'^२ = \text{य}^२ + (\text{क}—\text{य})^२ — २\text{य} (\text{क}—\text{य}) \text{ कोज्या आ}$$

$$= \text{य}^२ + \text{क}^२ + \text{य}^२ — २\text{क.य} — २\text{क.य.कोज्या आ} + २\text{य}^२\text{.कोज्या आ}$$

$$= \text{क}^२ + २\text{य}^२ + २\text{य}^२\text{.कोज्या आ} — (२\text{क.य} + २\text{क.य.कोज्या आ})$$

$$= \text{क}^२ + २\text{य}^२(१ + \text{कोज्या आ}) — २\text{क य} (१ + \text{कोज्या आ})$$

$$= \text{क}^२ + (२\text{य}^२ — २\text{क य}) (१ + \text{कोज्या आ})$$

$$\therefore २\text{य}^२ — २\text{क य} = \frac{\text{अ}'^२ — \text{क}^२}{१ + \text{कोज्या आ}},$$

ततः पक्षौ द्विगुणौ क वर्गेण संयुक्तौ च,

$$\therefore ४\text{य}^२ — ४\text{क.य} + \text{क}^२ = \frac{२\text{अ}'^२ — २\text{क}^२ + \text{क}^२ + \text{क}^२\text{.कोज्या आ}}{१ + \text{कोज्या आ}},$$

छेदघ्नरूपेषु लवा घनर्णमित्यनुसारतः,

$$=\frac{२अ'^{२}-क^{२}+क^{२}.कोज्या\ आ}{१+कोज्या\ आ}=\frac{२अ'^{२}-क^{२}(१-कोज्या\ आ)}{१+कोज्या\ आ}$$

अत्र $१+कोज्या\ आ=२कोज्या^{२}\ \frac{१}{२}आ$, २४ प्रक्रमेण, ततः पक्षयो मूल-ग्रहणेन,

$$२य-क=\frac{\sqrt{२अ'^{२}-क^{२}.उआ}}{\pm\sqrt{२\ कोज्या^{२}\ \frac{१}{२}\ आ}}$$

अत्रोत्तर पक्षस्यांशहरौ $\sqrt{२}$ अनेन वर्गेण वर्ग गुणयेदिति नियमेन तद्वर्गेण २ अनेन विभज्य ततः पक्षौ रूपद्वयेन विभज्य पक्षान्तरानयनं च कृत्वा

$$य=\frac{१}{२}क\pm\frac{\sqrt{अ'^{२}-क^{२}.\frac{१}{२}उ\ आ}}{२\ कोज्या\ \frac{१}{२}\ आ}\ ।$$

एतदेव क स्थानात् अ स्थानस्यान्तरम् ।

$$\therefore\ क-य=\frac{१}{२}\ क\mp\frac{\sqrt{अ'^{२}-क^{२}.\frac{१}{२}उ\ आ}}{२\ कोज्या\ \frac{१}{२}\ आ}\ ।$$

एतत् अ स्थानात् ग स्थानस्यान्तरम् ।

(२९) प्रक्रमोक्तप्रश्नानामुत्तराणि ।

(१) $ज्याअ^{२} = १ - कोज्या^{२}अ \quad \therefore \quad ज्याअ = \sqrt{१ - कोज्या^{२}अ}$ ।

$$ज्याअ = \frac{ज्याअ \,.\, कोज्याअ}{कोज्याअ} = कोज्याअ \,.\, स्पअ \text{ ।}$$

$$ज्याअ = \frac{ज्याअ \times \frac{१}{कोज्याअ}}{\frac{१}{कोज्याअ}} = \frac{\frac{ज्याअ}{कोज्याअ}}{\frac{१}{कोज्याअ}} = \frac{स्पअ}{छेअ} = \frac{स्पअ}{\sqrt{१ + स्प^{२}अ}} \text{ ।}$$

$$ज्याअ = \frac{कोज्याअ}{\frac{कोज्याअ}{ज्याअ}} = \frac{कोज्याअ}{कोस्प} \text{ ।}$$

$$ज्याअ = \frac{ज्याअ \times \frac{१}{ज्याअ}}{\frac{१}{ज्याअ}} = \frac{१}{\frac{१}{ज्याअ}} = \frac{१}{कोछेअ}$$

$$= \frac{१}{\sqrt{१ + कोस्प^{२}अ}} \text{ ।}$$

$$ज्याअ = \frac{\frac{१}{कोज्याअ} \times कोज्याअ}{\frac{१}{ज्याअ}} = \frac{छेअ \times कोज्याअ}{कोछेअ}$$

$$ज्याअ = \frac{\frac{ज्याअ}{कोज्याअ} \times \frac{कोज्याअ}{ज्याअ}}{\frac{१}{ज्याअ}}$$

$$=\frac{\text{स्पअ} \times \text{कोस्पअ}}{\text{कोछेअ}} \text{ ।}$$

$$\text{ज्याअ}=\frac{\text{स्पअ}}{\text{छेअ}}=\frac{\sqrt{\text{छे}^2\text{अ}-१}}{\text{छेअ}} \text{ ।}$$

(२) $$\text{कोज्याअ}=\frac{\text{ज्याअ}}{\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}}=\frac{\text{ज्याअ}}{\text{स्पअ}} \text{ ।}$$

$$\text{कोज्याअ}=\frac{\text{कोज्याअ}\times\frac{१}{\text{कोज्याअ}}}{\frac{१}{\text{कोज्याअ}}}=\frac{१}{\text{छेअ}}=\frac{१}{\sqrt{१+\text{स्प}^2\text{अ}}} \text{ ।}$$

$$\text{कोज्याअ}=\frac{\frac{\text{ज्या}}{\text{कोज्याअ}}\times\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}}{\frac{१}{\text{कोज्याअ}}}=\frac{\text{स्पअ}\times\text{कोस्पअ}}{\text{छेअ}} \text{ ।}$$

$$\text{कोज्याअ}=\frac{\text{ज्याअ}\times\frac{१}{\text{ज्याअ}}}{\frac{१}{\text{कोज्याअ}}}$$

$$=\frac{\text{ज्याअ}\times\text{कोछेअ}}{\text{छेअ}} \text{ ।}$$

$$\text{कोज्याअ}=\frac{\text{ज्याअ}\times\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}=\text{ज्याअ.कोस्पअ} \text{ ।}$$

$$\text{कोज्याअ}=\frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}=\frac{\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}}{\frac{१}{\text{ज्याअ}}}=\frac{\text{कोस्पअ}}{\text{कोछेअ}}$$

$$=\frac{\text{कोस्पअ}}{\sqrt{१+\text{कोस्प}^2\text{अ}}}=\frac{\sqrt{\text{कोछे}^2\text{अ}-१}}{\text{कोछेअ}} \text{ ।}$$

(३) $स्पअ = \frac{ज्याअ}{कोज्याअ} = \frac{ज्या}{\sqrt{१ - ज्या^२अ}}$ ।

$$स्पअ = \frac{ज्याअ}{कोज्याअ} = \frac{\sqrt{१ - कोज्या^२अ}}{कोज्याअ} ।$$

$$स्पअ = \frac{ज्याअ}{कोज्याअ} = \frac{१}{\frac{कोज्याअ}{ज्याअ}} = \frac{१}{कोस्पअ} ।$$

$$स्पअ = \frac{१}{कोस्पअ} = \frac{१}{\sqrt{कोछे^२अ - १}} ।$$

$$स्पअ = \frac{ज्याअ}{\frac{कोज्याअ}{ज्याअ}} \times \frac{१}{ज्याअ} = \frac{ज्याअ \times कोछेअ}{कोस्पअ} ।$$

$$स्पअ = \frac{१}{कोज्याअ \times \frac{१}{ज्याअ}} = \frac{छेअ}{कोछेअ} ।$$

$$स्पअ = \frac{कोज्याअ}{ज्याअ. \frac{कोज्याअ}{ज्याअ} \times \frac{कोज्याअ}{ज्याअ}}$$

$$= \frac{कोज्याअ}{ज्याअ.कोस्प^२अ} ।$$

$$स्पअ = \frac{\sqrt{१ - कोज्या^२अ}}{१ - उअ} = \frac{\sqrt{१ - (१ - उअ)^२}}{१ - उअ}$$

$$= \frac{\sqrt{२ उअ - उ^२अ}}{१ - उअ} ।$$

(४) $कोस्पअ = \frac{कोज्याअ}{ज्या}$ । इतोऽग्रे पूर्वोक्तस्पर्शरेखास्वरूपे बहुधा हरभाज्ययोः परिवर्त्तनादेव सर्वमुपपद्यते ।

(५) $छेअ = \frac{१}{कोज्याअ} = \sqrt{१ + स्प^{२} अ}$ ।

$छेअ = \frac{ज्याअ \times १}{कोज्याअ \times ज्याअ} = \frac{स्पअ}{ज्याअ}$ ।

$छेअ = \frac{ज्याअ \times १}{कोज्याअ \times ज्याअ} = \frac{१}{\frac{कोज्याअ}{ज्याअ} \times ज्याअ}$

$= \frac{१}{कोस्पअ \times ज्याअ}$ ।

$छेअ = \frac{१}{कोस्पअ \times ज्याअ} = \frac{\frac{१}{ज्याअ}}{कोस्पअ} = \frac{कोछेअ}{कोस्पअ}$ ।

$छेअ = \frac{ज्या अ \times कोज्या अ \times १}{कोज्याअ \times ज्याअ \times कोज्याअ} = \frac{स्पअ \times कोस्पअ}{कोज्याअ}$ ।

$छेअ = \frac{ज्याअ \times १}{कोज्याअ \times ज्याअ} = \frac{ज्याअ}{कोज्याअ} \times \frac{१}{ज्याअ}$

$= \frac{ज्याअ \times कोछेअ}{कोज्याअ}$ ।

$छेअ = \frac{१}{कोज्याअ} = \frac{१}{\sqrt{१ - ज्या^{२}अ}}$ ।

$छेअ = \frac{कोछेअ}{कोस्पअ} = \frac{\sqrt{१ + कोस्प^{२}अ}}{कोस्पअ}$ ।

$छेअ = \frac{कोछेअ}{कोस्पअ} = \frac{कोछेअ}{\sqrt{कोछेअ^{२} - १}}$ ।

$छेअ = \frac{ज्याअ \times १}{कोज्याअ \times ज्याअ} = स्पअ \times कोछेअ$ ।

$छेअ = \frac{१}{कोज्याअ} = \frac{१}{१ - उअ}$ ।

(६) $कोछेअ = \frac{१}{ज्याअ} = \sqrt{१ + कोस्प^{२}अ}$ ।

$$कोछेअ = \frac{१}{ज्याअ} = \frac{\frac{१}{कोज्याअ}}{\frac{ज्याअ}{कोज्याअ}} = \frac{छेअ}{स्पअ} ।$$

$$कोछेअ = \frac{कोज्याअ \times १}{ज्याअ \times कोज्याअ} = \frac{कोस्पअ}{कोज्याअ} ।$$

$$कोछेअ = \frac{१}{ज्याअ} = \frac{कोज्याअ \times १}{ज्याअ \times कोज्याअ} = \frac{१}{\frac{ज्याअ}{कोज्याअ} \times कोज्याअ}$$

$$= \frac{१}{कोज्याअ \times स्पअ} ।$$

$$कोछेअ = \frac{\frac{ज्याअ}{कोज्याअ} \times \frac{कोज्याअ}{ज्याअ}}{ज्याअ} = \frac{स्पअ \times कोस्पअ}{ज्याअ} ।$$

$$कोछेअ = \frac{कोज्याअ \times १}{ज्याअ \times कोज्याअ} = \frac{कोज्याअ \times छेअ}{ज्याअ} ।$$

$$कोछेअ = \frac{१}{ज्याअ} = \frac{१}{\sqrt{१ - कोज्या^{२}अ}} ।$$

$$कोछेअ = \frac{छेअ}{स्पअ} = \frac{\sqrt{१ + स्प^{२}अ}}{स्पअ} ।$$

$$कोछेअ = \frac{छेअ}{स्पअ} = \frac{छेअ}{\sqrt{छे^{२}अ - १}} ।$$

$$कोछेअ = \frac{कोज्याअ \times १}{ज्याअ \times कोज्याअ} = कोस्पअ \times छेअ ।$$

$$\text{कोछेअ} = \frac{१}{\text{ज्याअ}} = \frac{१}{\sqrt{१ - \text{कोज्या}^२\text{अ}}} = \frac{१}{\sqrt{१ - (१ - \text{उअ})^२}}$$

$$= \frac{१}{\sqrt{२\,\text{उअ} - \text{उ}^२\text{अ}}} \text{।}$$

(७) उअ $= १ -$ कोज्याअ।

$$\text{उअ} = १ - \text{कोज्याअ} = १ - \sqrt{१ - \text{ज्या}^२\text{अ}} \text{।}$$

$$\text{उअ} = १ - \text{कोज्याअ} = १ - \frac{१}{\frac{१}{\text{कोज्याअ}}} = १ - \frac{१}{\text{छेअ}}$$

$$= १ - \frac{१}{\sqrt{१ + \text{स्प}^२\text{अ}}} \text{।}$$

$$\text{उअ} = १ - \text{कोज्याअ} = १ - \frac{\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}$$

$$= १ - \frac{१}{\frac{१}{\text{ज्याअ}}} \times \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} = १ - \frac{\text{कोस्पअ}}{\text{कोछेअ}}$$

$$= १ - \frac{\text{कोस्पअ}}{\sqrt{१ + \text{कोस्प}^२\text{अ}}} \text{।}$$

$$\text{उअ} = १ - \frac{\text{कोस्पअ}}{\text{कोछेअ}} = १ - \frac{\sqrt{\text{कोछे}^२\text{अ} - १}}{\text{कोछेअ}} \text{।}$$

एवमेव कोटयुत्क्रमज्या स्वरूपाणि रूपाज्ज्यास्वरूपाणि विशोध्य भवन्ति।

अथ

(३०) प्रक्रमोक्तद्विगुणकोणस्य ज्यादिस्वरूपाणां वैशद्यम्।

(१) $\text{ज्या}\,२\,\text{अ} = २\,\text{ज्याअ}\,.\,\text{कोज्याअ} = \frac{२\,\text{ज्याअ}\,.\,\text{ज्याअ}\,.\,\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}$

$$= \frac{२\,\text{ज्या}^२\text{अ}}{\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}} = \frac{२\,\text{ज्या}^२\text{अ}}{\text{स्पअ}} \text{।}$$

$$\text{ज्या}२\text{अ} = २\ \text{ज्याअ} . \text{कोज्याअ} = \frac{२\text{ज्याअ} . \text{कोज्याअ} . \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{\frac{२\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}{\text{कोज्याअ}}}{\text{ज्याअ}} = \frac{२\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}{\text{कोस्पअ}} ।$$

$$\text{ज्या}२\text{अ} = २\text{ज्याअ} . \text{कोज्याअ} = \frac{२\text{ज्याअ}}{\frac{१}{\text{कोज्याअ}}} = \frac{२\text{ज्याअ}}{\text{छेअ}} ।$$

$$\text{ज्या}२\text{अ} = २\text{ज्याअ} . \text{कोज्याअ} = \frac{२\text{कोज्याअ}}{\frac{१}{\text{ज्याअ}}} = \frac{२\text{कोज्याअ}}{\text{कोछेअ}} ।$$

$$\text{ज्या}२\text{अ} = २\text{ज्याअ} . \text{कोज्याअ} = \frac{२\text{ज्याअ} . \text{कोज्याअ} . \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{२\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ} \times \frac{१}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}} = \frac{२\text{स्पअ}}{\text{छे}^{२}\text{अ}} ।$$

$$\text{ज्या}२\text{अ} = \frac{२\ \text{स्प}\ \text{अ}}{\text{छे}^{२}\ \text{अ}} = \frac{२\ \text{स्प}\ \text{अ}}{\sqrt{१ + \text{स्प}^{२}\ \text{अ}}} ।$$

$$\text{ज्या}२\text{अ} = २\text{ज्याअ} . \text{कोज्याअ} = \frac{२}{\frac{१}{\text{ज्याअ} . \text{कोज्याअ}}}$$

$$= \frac{२}{\frac{\text{ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{ज्याअ} . \text{कोज्याअ}} + \frac{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}{\text{ज्याअ} . \text{कोज्याअ}}}$$

$$= \frac{२}{\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} + \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}} = \frac{२}{\text{स्पअ} + \text{कोस्पअ}} ।$$

$$\text{ज्या}२\text{अ} = २\text{ज्याअ} . \text{कोज्याअ} = \frac{२\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ} \times \frac{१}{\text{ज्या}^{२}\text{अ}}} = \frac{२\text{कोस्पअ}}{\text{कोछे}^{२}\text{अ}} ।$$

$$\text{ज्या}२\text{अ} = \frac{२\text{कोस्पअ}}{\text{कोछे}^{२}\text{अ}} = \frac{२\text{कोस्पअ}}{१ + \text{कोस्प}^{२}\text{अ}} ।$$

(२) $कोज्या२अ = कोज्या^2 अ - ज्या^2 अ = (१ - ज्या^2 अ) - ज्या^2 अ$
$= १ - २ ज्या^2 अ$ ।

$कोज्या२अ = कोज्या^2 अ - ज्या^2 अ = कोज्या^2 अ - (१ - कोज्या^2 अ)$
$= कोज्या^2 अ - १ + कोज्या^2 अ = २कोज्या^2 अ - १$ ।

$$कोज्या२अ = कोज्या^2 अ - ज्या^2 अ = \frac{१ - \frac{ज्या^2 अ}{कोज्या^2 अ}}{\frac{१}{कोज्या^2 अ}}$$

$$= \frac{१ - स्प^2 अ}{छे^2 अ} = \frac{१ - स्प^2 अ}{१ + स्प^2 अ} ।$$

$$कोज्या२अ = कोज्या^2 अ - ज्या^2 अ = \frac{\frac{कोज्या^2 अ - ज्या^2 अ}{कोज्याअ \, . \, ज्याअ}}{\frac{१}{कोज्याअ \, . \, ज्याअ}}$$

$$= \frac{\frac{कोज्याअ}{ज्याअ} - \frac{ज्याअ}{कोज्याअ}}{\frac{कोज्या^2 अ + ज्या^2 अ}{कोज्याअ \, . \, ज्याअ}} = \frac{कोस्पअ - स्पअ}{\frac{कोज्याअ}{ज्याअ} + \frac{ज्याअ}{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{कोस्पअ - स्पअ}{कोस्पअ + स्पअ} ।$$

$$कोज्या२अ = कोज्या^2 अ - ज्या^2 अ = \frac{\frac{कोज्या^2 अ}{ज्या^2 अ} - १}{\frac{१}{ज्या^2 अ}}$$

$$= \frac{कोस्प^2 अ - १}{\frac{कोज्या^2 अ + ज्या^2 अ}{ज्या^2 अ}} = \frac{कोस्प^2 अ - १}{कोस्प^2 अ + १} ।$$

$कोज्या२अ = कोज्या^2 अ - ज्या^2 अ = २कोज्या^2 अ - १$

$$= \frac{\frac{२कोज्या^2 अ - १}{कोज्या^2 अ}}{\frac{१}{कोज्या^2 अ}} = \frac{२ - \frac{१}{कोज्या^2 अ}}{\frac{१}{कोज्या^2 अ}} = \frac{२ - छे^2 अ}{छे^2 अ} ।$$

$$\text{कोज्या२अ} = \text{२कोज्या}^{\text{२}}\text{अ} - \text{१} = \frac{\dfrac{\text{२कोज्या}^{\text{२}}\text{अ} - \text{१}}{\text{कोज्याअ}}}{\dfrac{\text{१}}{\text{कोज्याअ}}}$$

$$= \frac{\text{२कोज्याअ} - \dfrac{\text{१}}{\text{कोज्याअ}}}{\dfrac{\text{१}}{\text{कोज्याअ}}} = \frac{\text{२कोज्याअ} - \text{छेअ}}{\text{छेअ}} \text{।}$$

$$\text{कोज्या२अ} = \text{कोज्या}^{\text{२}}\text{अ} - \text{ज्या}^{\text{२}}\text{अ} = \text{१} - \text{२ज्या}^{\text{२}}\text{अ} = \frac{\dfrac{\text{१} - \text{२ज्या}^{\text{२}}\text{अ}}{\text{ज्या}^{\text{२}}\text{अ}}}{\dfrac{\text{१}}{\text{ज्या}^{\text{२}}\text{अ}}}$$

$$= \frac{\text{कोछे}^{\text{२}}\text{अ} - \text{२}}{\text{कोछे}^{\text{२}}\text{अ}} \text{।}$$

$$\text{कोज्या२अ} = \text{२कोज्या}^{\text{२}}\text{अ} - \text{१} = \frac{\dfrac{\text{२कोज्या}^{\text{२}}\text{अ} - \text{१}}{\text{कोज्याअ}}}{\dfrac{\text{१}}{\text{कोज्याअ}}}$$

$$= \frac{\text{२कोज्याअ} - \dfrac{\text{१}}{\text{कोज्याअ}}}{\dfrac{\text{१}}{\text{कोज्याअ}}} = \frac{\text{२कोज्याअ} - \text{छेअ}}{\text{छेअ}} \text{।}$$

$$\text{काज्या२अ} = \text{१} - \text{२ज्या}^{\text{२}}\text{अ} = \frac{\dfrac{\text{१} - \text{२ ज्या}^{\text{२}}\text{ अ}}{\text{ज्या}^{\text{२}}\text{अ}}}{\dfrac{\text{१}}{\text{ज्या}^{\text{२}}\text{ अ}}} = \frac{\dfrac{\text{१}}{\text{ज्या}^{\text{२}}\text{ अ}} - \text{२}}{\dfrac{\text{१}}{\text{ज्या}^{\text{२}}\text{ अ}}}$$

$$= \frac{\text{कोछे}^{\text{२}}\text{ अ} - \text{२}}{\text{कोछे}^{\text{२}}\text{अ}} \text{।}$$

$$\text{कोज्या२अ} = १ - \text{२ज्या}^{२}\text{अ} = \frac{\dfrac{१-\text{२ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{ज्याअ}}}{\dfrac{१}{\text{ज्याअ}}}$$

$$= \frac{\text{कोछेअ} - \text{२ज्याअ}}{\text{कोछेअ}} \text{ ।}$$

(३) $$\text{स्प२अ} = \frac{\text{ज्या२अ}}{\text{कोज्या२अ}} = \frac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}-\text{ज्या}^{२}\text{अ}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}}{\dfrac{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}-\text{ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}} = \frac{\dfrac{\text{२ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}}{१-\dfrac{\text{ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}}$$

$$= \frac{\text{२स्प अ}}{१-\text{स्प}^{२}\text{ अ}} \text{ ।}$$

$$\text{स्प२अ} = \frac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{ अ}-\text{ज्या}^{२}\text{ अ}} = \frac{२}{\dfrac{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}-\text{ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{ज्याअ . कोज्याअ}}}$$

$$= \frac{२}{\dfrac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}-\dfrac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}} = \frac{२}{\text{कोस्पअ} - \text{स्पअ}} \text{ ।}$$

$$\text{स्प २ अ} = \frac{\text{२ ज्याअ.कोज्या अ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{२}\text{अ}} = \frac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{१-\text{२ज्या}^{२}\text{अ}} \text{ ।}$$

$$\text{स्प२अ} = \frac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{२}\text{अ}} = \frac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{\text{२कोज्या}^{२}\text{अ}-१} \text{ ।}$$

$$\text{स्प२अ} = \frac{\dfrac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{\text{ज्या}^{२}\text{अ}}}{\dfrac{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{ज्या}^{२}\text{अ}}} = \frac{\dfrac{\text{२कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}}{\dfrac{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}{\text{ज्या}^{२}\text{अ}}-१}$$

$$= \frac{\text{२कोस्पअ}}{\text{कोस्प}^{२}\text{अ}-१} \text{ ।}$$

$$\text{स्प२अ} = \frac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{२}\text{अ}} = \frac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{\text{२कोज्या}^{२}\text{अ} - १}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}}{\dfrac{\text{२कोज्या}^{२}\text{अ} - १}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}} = \frac{\dfrac{\text{२ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}}{२ - \dfrac{१}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}} = \frac{\text{२स्पअ}}{२ - \text{छे}^{२}\text{अ}} ।$$

$$\text{स्प२अ} = \frac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{२}\text{अ}} = \frac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{१ - \text{२ज्या}^{२}\text{अ}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{२ज्याअ . कोज्याअ}}{\text{ज्या}^{२}\text{अ}}}{\dfrac{१ - २\ \text{ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{ज्या}^{२}\text{अ}}} = \frac{\dfrac{\text{२कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}}{\dfrac{१}{\text{ज्या}^{२}\text{अ}} - २}$$

$$= \frac{\text{२कोस्पअ}}{\text{कोछे}^{२}\text{अ} - २} ।$$

(४) $\text{कोस्प२अ} = \dfrac{\text{कोज्या२अ}}{\text{ज्या२अ}} = \dfrac{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{२कोज्याअ. ज्याअ}}$ ।

एवं स्पष्टमवगम्यते यत् स्पर्शरेखाया हरभाज्ययोः परिवर्त्तनात् कोटिस्पर्श-रेखा भवत्यतः पूर्वक्तस्पर्शरेखास्वरूपाणां हरभाज्ययोः परिवर्त्तनादेव सर्वेषां कोटिस्पर्शरेखास्वरूपाणां सिद्धिः सुखेन संपाद्या ।

(५) $\text{छे२अ} = \dfrac{१}{\text{कोज्या२अ}} = \dfrac{१}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{२}\text{अ}} = \dfrac{१}{\text{२कोज्या}^{२}\text{अ} - १}$

$$= \frac{\dfrac{१}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}}{\dfrac{\text{२कोज्या}^{२}\text{अ} - १}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}} = \frac{\text{छे}^{२}\text{अ}}{२ - \dfrac{१}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}} = \frac{\text{छे}^{२}\text{अ}}{२ - \text{छे}^{२}\text{अ}} ।$$

$$\text{छे२अ} = \frac{१}{\text{२कोज्या}^{२}\text{अ} - १} = \frac{\dfrac{१}{\text{कोज्याअ}}}{\dfrac{\text{२कोज्या}^{२}\text{अ} - १}{\text{कोज्याअ}}}$$

$$= \frac{\text{छेअ}}{२\text{कोज्याअ} - \frac{१}{\text{कोज्याअ}}} = \frac{\text{छेअ}}{२\text{कोज्याअ} - \text{छेअ}} ।$$

$$\text{छे}२\text{अ} = \frac{१}{२\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - १} = \frac{१}{१ - २\text{ज्या}^{२}\text{अ}}$$ एते तु पूर्वकृतवैशद्यादतिविशदे ।

$$\text{छे}२\text{अ} = \frac{१}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{२}\text{अ}} = \frac{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} + \text{ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{२}\text{अ}}$$

$$= \frac{\frac{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} + \text{ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}}{\frac{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}} = \frac{१ + \frac{\text{ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}}{१ - \frac{\text{ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}}$$

$$= \frac{१ + \text{स्प}^{२}\text{अ}}{१ - \text{स्प}^{२}\text{अ}} ।$$

$$\text{छे}२\text{अ} = \frac{१}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{२}\text{अ}} = \frac{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} + \text{ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{२}\text{अ}}$$

$$= \frac{\frac{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} + \text{ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{कोज्याअ. ज्याअ}}}{\frac{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{कोज्याअ. ज्याअ}}} = \frac{\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्या अ}} + \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}}{\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} - \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}}$$

$$= \frac{\text{कोस्पअ} + \text{स्पअ}}{\text{कोस्पअ} - \text{स्पअ}} ।$$

$$\text{छे}२\text{अ} = \frac{१}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{२}\text{अ}} = \frac{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} + \text{ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{२}\text{अ}}$$

$$= \frac{\frac{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} + \text{ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{ज्या}^{२}\text{अ}}}{\frac{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{ज्या}^{२}\text{अ}}} = \frac{\frac{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}{\text{ज्या}^{२}\text{अ}} + १}{\frac{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}{\text{ज्या}^{२}\text{अ}} - १}$$

$$= \frac{\text{कोस्प}^{२}\text{अ} + १}{\text{कोस्प}^{२}\text{अ} - १} ।$$

$$\text{छे}२\text{अ} = \frac{१}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{२}\text{अ}} = \frac{१}{१ - २\text{ज्या}^{२}\text{अ}}$$

$$= \frac{\dfrac{१}{\text{ज्या}^{२}\text{अ}}}{\dfrac{१ - २\text{ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{ज्या}^{२}\text{अ}}} = \frac{\text{कोछे}^{२}\text{अ}}{\dfrac{१}{\text{ज्या}^{२}\text{अ}} - २} = \frac{\text{कोछे}^{२}\text{अ}}{\text{कोछे}^{२}\text{अ} - २} \text{ ।}$$

४) $$\text{कोछे}२\text{अ} = \frac{१}{\text{ज्या}२\text{अ}} = \frac{१}{२\ \text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{१}{२} \cdot \frac{१ \times १}{\text{ज्याअ}.\ \text{कोज्याअ}} = \frac{१}{२}\text{छेअ} \times \text{कोछेअ} \text{ ।}$$

$$\text{कोछे}२\text{अ} = \frac{१}{\text{ज्या}२\text{अ}} = \frac{१}{२\text{ज्याअ} \times \text{कोज्याअ}} = \frac{\text{छेअ}}{२\text{ज्याअ}} \text{ ।}$$

$$\text{कोछे}२\text{अ} = \frac{१}{२\text{ज्याअ}\ .\ \text{कोज्याअ}} = \frac{\text{कोछेअ}}{२\text{कोज्याअ}} \text{ ।}$$

$$\text{कोछे}२\text{अ} = \frac{१}{\text{ज्या}२\text{अ}} = \frac{१}{२\text{ज्याअ}\ .\ \text{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{१}{\dfrac{२\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} \times \text{कोज्या}^{२}\text{अ}} = \frac{१}{२\text{स्पअ} \times \text{कोज्या}^{२}\text{अ}}$$

$$= \frac{\text{छे}^{२}\text{अ}}{२\text{स्पअ}} = \frac{१ + \text{स्प}^{२}\text{अ}}{२\text{स्पअ}} \text{ ।}$$

$$\text{कोछे}२\text{अ} = \frac{१}{२\text{ज्याअ}\ .\ \text{कोज्याअ}} = \frac{\text{ज्या}^{२}\text{अ} + \text{कोज्या}^{२}\text{अ}}{२\text{कोज्याअ}\ .\ \text{ज्याअ}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} + \dfrac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}}{\dfrac{२}{१}} = \frac{\text{स्पअ} + \text{कोस्पअ}}{२}$$

$$\text{कोछे}२\text{अ} = \frac{१}{२\text{ज्याअ}\ .\ \text{कोज्याअ}} = \frac{१}{२\text{ज्या}^{२}\text{अ}.\dfrac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}}$$

$$= \frac{\frac{१}{ज्या^{२}अ}}{\frac{२कोज्याअ}{ज्याअ}} = \frac{कोछे^{२}अ}{२कोस्पअ} = \frac{१ + कोस्प^{२}अ}{२कोस्पअ} ।$$

(७) $उ२अ = १ - कोज्या२अ = १ - (कोज्या^{२}अ - ज्या^{२}अ)$

$= १ - कोज्या^{२}अ + ज्या^{२}अ = २ज्या^{२}अ ।$

$उ२अ = १ - कोज्या^{२}अ + ज्या^{२}अ$

$= १ - कोज्या^{२}अ + १ - कोज्या^{२}अ$

$= २ - २ कोज्या^{२}अ ।$

$$उ२अ = २ज्या^{२}अ = \frac{\frac{२ज्या^{२}अ}{कोज्या^{२}अ}}{\frac{१}{कोज्या^{२}अ}} = \frac{२स्प^{२}अ}{छे^{२}अ} = \frac{२स्प^{२}अ}{१ + स्प^{२}अ} ।$$

$$उ२अ = २ज्या^{२}अ = \frac{\frac{२ज्या^{२}अ}{ज्याअ.कोज्याअ}}{\frac{१}{ज्याअ.कोज्याअ}} = \frac{\frac{२ज्याअ}{कोज्याअ}}{\frac{१ \times १}{१ \times ज्याअ.कोज्याअ}}$$

$$= \frac{२स्पअ}{\frac{१}{ज्याअ.कोज्याअ}} = \frac{२स्पअ}{\frac{ज्या^{२}अ}{ज्याअ.कोज्याअ} + \frac{कोज्या^{२}अ}{ज्याअ.कोज्याअ}}$$

$$= \frac{२स्पअ}{\frac{ज्याअ}{कोज्याअ} + \frac{कोज्याअ}{ज्याअ}} = \frac{२स्पअ}{स्पअ + कोस्पअ} ।$$

$$उ२अ = २ज्या^{२}अ = \frac{२}{\frac{१}{ज्या^{२}अ}} = \frac{२}{कोछे^{२}अ} = \frac{२}{१ + कोस्प^{२}अ} ।$$

$$उ२अ = २ज्या^{२}अ = \frac{२ज्याअ}{\frac{१}{ज्याअ}} = \frac{२ज्या अ}{कोछेअ} ।$$

$$उ२अ = २ज्या^२अ = \frac{\frac{२ज्या^२अ}{कोज्या^२अ}}{\frac{१}{कोज्या^२अ}} = \frac{२स्प^२अ}{छे^२अ} = \frac{२(छे^२अ - १)}{छे^२अ} ।$$

$$उ२अ = २ज्या^२अ = \frac{\frac{२ज्या^२अ}{कोज्याअ}}{\frac{१}{कोज्याअ}} = \frac{\frac{२ज्या^२अ}{कोज्याअ}}{\frac{१}{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{२\left(\frac{१ - कोज्या^२अ}{कोज्याअ}\right)}{\frac{१}{कोज्याअ}} = \frac{२\left(\frac{१}{कोज्याअ} - कोज्याअ\right)}{\frac{१}{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{२(छेअ - कोज्याअ)}{छेअ} ।$$



परिशिष्टम्

प्रस्तुतग्रन्थस्य चतुर्थाध्याये पर्वतवंशादिपदार्थाना दूरत्वोच्छ्रायाद्यवगमाय यत्त्रिभुजगणितं प्रदर्शितं, तत्र घातमापकगणितस्य बाहुल्येन प्रयुज्यमानत्वादत्रघातमापकगणिस्य स्वल्पपरिचयप्रदानपुरस्सर गणितसौकर्यार्थमत्यावश्यकस्य चेम्बर्स घातमापकसारणी (Chambers's Mathematical Tables) नामकपुस्तकस्योपयोगविधिरपि प्रदर्श्यते ।

घातमापकाङ्क (लघुरिक्थ) गणितस्य स्वल्पपरिचयः ।

(१) बृहत्संख्याना गुणनभजनमूलग्रहणादावतीवगौरव ज्ञात्वा तत्स्थाने घातमापकसंज्ञका अन्यसंख्याः प्रकल्प्य तद्द्वारा गुणनादिफल लाघवेन ज्ञायते। कल्प्ययाम्, $\text{स} = \text{म}^{\text{क}}$ इति समीकरणम् । अत्र स,म,क वर्णा. सख्याद्योतकाः सन्ति । अत्र म वर्णः आधारसंज्ञः, क सख्या मसख्याधारे स संख्याया घातमापको निगद्यते । अत्र $\text{क} = {}^{\text{घा}}\text{म}^{\text{स}}$ अनेनसमीकरणेनापि $\text{स} = \text{म}^{\text{क}}$ अस्य बोधो भवति । यथा $२^{६} = ६४$ कि वा $६ = {}^{\text{घा}}२^{६४}$, अत्र रूपद्वयाधारे ६४ संख्यायाः ६ अयं घातमापकोऽस्ति । एवमेव $१०^{३} = १०००$ कि वा $३ = {}^{\text{घा}}१०^{१०००}$, अत्र ३ अयं १० आधारे १००० संख्या—या घातमापको भवति । किन्तु साम्प्रतं $३ = {}^{\text{घा}}१०^{१०००}$ एतत्स्थाने ${}^{\text{घा}}१००० = ३$ किं वा ३ ००००००० एवं लिख्यते ।

(२) यत्र घातमापको भिन्नसंख्यात्मको भवति तत्र हर आधारस्य मूलद्योतकः, अंशश्च घातद्योतको ज्ञेयः । यथा $८^{\left(\frac{२}{३}\right)} = \left(८^{\frac{१}{३}}\right)^{२} = २^{२} = ४$, अतः $\frac{२}{३} = {}^{\text{घा}}८^{४}$ ।

(३) एकस्मिन्नाधारे द्वयोः संख्ययोर्गुणनफलस्य घातमापकस्तयोः संख्ययोर्घातमापकयोर्योगेन समोभवति । यथा $४ \times १६ = ६४$, अथवा $२^{२} \times २^{४} = २^{२+४} = २^{६} = ६४$ ।

(४) एकस्मिन्नाधारे लब्धेर्घातमापको भाजकघातमापकोनेन भाज्यघातमापकेन समोभवति। यथा १६ ÷ ४ = ४, किं वा $२^{४} \div २^{२} = २^{४-२} = २^{२} = ४$। अत्र भाजकघातमापकस्य भाज्यघातमापकतोऽधिकत्वे लब्धेर्घातमापकऋणात्मको भवति। यथा $४ \div १६ = \frac{१}{४}$, अथवा $२^{२} \div २^{४} = २^{२-४} = २^{-२} = \frac{१}{२^{२}} = \frac{१}{४}$। अनेनेदमवगम्यते, यत्र घातमापक ऋणगतो भवति तत्र तद्घातमान तदघातभक्तेन रूपेण समं भवति। एवमेव $२^{२} \div २^{२} = \frac{२^{२}}{२^{२}} = २^{२-२} = २^{०} = १$, अनेन कस्मिन्नप्याधारे रूपस्य घातमापकः शून्यं भवतीति ज्ञायते।

(५) कस्याश्चित्संख्याया अभीष्टघातस्य घातमापकस्तत्संख्याघातमापकेनाभीष्टघाताङ्कगुणितेन समोभवति। यथा, संख्या = ४ = $२^{२}$, अस्यवर्ग. १६ = $२^{४}$, अत्र १६ अस्य द्वयङ्काधारे घातमापकः ४, अयं संख्यायाः $२^{२}$ अस्या द्वयङ्काधारे घात, मापकः २, अभीष्टघाताङ्कश्च २, अनयोर्गुणनफलेन तुल्यः। अनेन घातमापकस्य संख्या क्रमेण द्वित्र्यादिगुणिता घातमापकस्य वर्गादिघाता भवन्तीत्यवगम्यते।

(६) कस्याश्चित्संख्याया अभीष्टघातस्य घातमापकेऽभीष्टघातमूलाङ्केन विभक्तेऽभीष्टघातमूलस्य घातमापको भवति। यथा संख्या = ४ = $२^{२}$, अस्य घनः = ६४ = $२^{६}$, ६४ अस्य द्वयङ्काधारे घातमापकः = ६, अयमभीष्टघातमूलाङ्केन ३ अनेन विभक्ते लब्धं २ अयं ६४ अस्य घनमूलस्य ४ = $२^{२}$, अस्य घातमापकेन २ अनेन समोऽस्ति ' अनेन घातपमापकस्य संख्याक्रमेण द्वित्र्यादिविभक्ता घातमापकस्य वर्गादिघातमूलानि भवन्तीति ज्ञायते।

अथ चेम्बर्सघातमापकसारण्या उपयोगविधिः।

अस्मिन्प्रकरणे सर्वत्र घातमापकस्थाने "लघुरिक्थ" शब्दः प्रयुक्तोऽस्ति तथास्यां सारण्यां लिखितानि सर्वाणि लघुरिक्थानि दशाङ्काधारे सन्तीति ज्ञेयम्।

अथैतत्सम्बन्धिनः कतिचिन्नियमा विलिख्यन्ते :—

नियमः—(१) यतो हि लघुरिक्थं दशमलवभिन्नवद्विलिख्यते, अतस्तद्दशमलवबिन्दोर्दक्षिणपार्श्वस्थो भिन्नभागस्तद्वामपार्श्वस्थश्चाभिन्नभाग इत्यभिधीयते। अयमभिन्नभागः पूर्णाङ्कशब्देनापि व्यवह्रियते। अस्यां सारण्यां सर्वत्र लघुरिक्थस्य

भिन्नभाग एव लिखितो वर्तते। तदभिन्नभागस्त्वनन्तरोक्तद्वितीयनियमानुसारेणैव लेखनीयो भवति। अस्मिल्लघुरिक्थे सूक्ष्मतार्थमङ्कसप्तकं विलिखितं वर्तते।

अथास्याः सारण्या द्वितीयपृष्ठतः पञ्चमपृष्ठं यावत् १ तः ९९९ पर्यन्तं सर्वाः संख्याः क्रमेण विलख्य तत्संमुखे तल्लघुरिक्थभिन्नभागा लिखिताः सन्ति। ततः ६ पृष्ठतः १८५ पृष्ठपर्यन्त प्रतिपृष्ठ तद्वामभागस्थान्तिमोर्ध्वाधरपङ्क्तौ १०००तः ९९९९ पर्यन्तं सर्वाः सख्या यथाक्रम लिखिताः सन्ति। सर्वोपरिस्थितायां तिर्यक्पङ्क्तौ च ० तः ९ पर्यन्तं क्रमेणाङ्का लिखिता वर्तन्ते। एष्वङ्केषु प्रत्येक उक्तक्रमबद्धसंख्याया दशांशस्थानीयाङ्कस्तत्सख्यादक्षिणपार्श्वस्थोऽग्रिमोऽङ्को वा कल्पयितुं शक्यते।

अथ कस्याश्चित्सख्याया लघुरिक्थभिन्नभागस्य सप्तस्वङ्केषु वामपार्श्वस्थं प्रथममङ्कत्रयं क्रमिकसंख्याशून्यदशांशोर्ध्वाधरपङ्क्त्योर्मध्यभागे तत्संख्यासमीप एवानुपूर्व्येण लिखित्वावशिष्टमङ्कचतुष्टय तत्सख्यासमुखे तद्दशांशस्थानीयाङ्काधोभागे च लिखितमस्ति। यथा ३४६१·४, अस्याः सख्याया लघुरिक्थभिन्नभागः ·५३९२५१८ अयं भवति। किन्तु यस्य लघुरिक्थभिन्नभागस्यान्तिमाङ्कचतुष्टयस्योपरि तिर्यग्रेखा कृता भवेत्, तस्य तदङ्कचतुष्टयतिर्यक्पङ्क्तिसम्बन्धिप्रथममङ्कत्रयमलिखित्वा तदधःस्थितपङ्क्तिसमुखस्थमेवाङ्कत्रयं विलेख्यम्। यतोऽत्राङ्कचतुष्टयोपरि तिर्यग्रेखाकरणेन तदग्रिमस्य प्रथमाङ्कत्रयस्य प्रारम्भः सूच्यते। यथा—२६६०·८ अस्याः संख्याया लघुरिक्थभिन्नभागः ·४२५०१२२, अयं भवति, न तु ·४२४०१२२ अयम्।

एवमेवास्याः सारण्या दक्षिणपार्श्वस्थान्तिमोर्ध्वाधरपङ्क्तौ तिर्यक्पङ्क्तिस्थलघुरिक्थान्तिमाङ्कचतुष्टयाना पूर्वापरान्तराणि लिखितानि सन्ति। तदधश्चोर्ध्वाधरक्रमेण १ तः ९ पर्यन्तं क्रमेणाङ्कान् विलिख्य तत्समुखे तेषामनुपातजफलानि सन्ति। एतदनुपातस्वरूप यथा—रुपेणोक्तपूर्वापरान्तरं लभ्यते चेदेकादिदशांशस्थानीयाङ्कैः किमिति। अस्योपयोगः (५) नियमे (७) नियमे च प्रदर्शितोऽस्ति। अत्र यद्यभीष्टपूर्वापरान्तरं सारण्यां न लभ्यते तदंकान्तरितमेव सारणीस्थपूर्वापरान्तरं ग्राह्यम्। एव स्थितौ कस्याश्चित्सख्याया अनन्तरोक्तस्य पञ्चमनियमस्य प्रथमप्रकारेण साधितमेव लघुरिक्थं सूक्ष्मतरं भवतीति ज्ञेयम्।

अथास्याः सारण्याः १८६ तमपृष्ठतः २०१तमपृष्ठं यावत् १०००० तः १०८००, पर्यन्तं सर्वाः सख्याः क्रमशो लिखित्वा तल्लघुरिक्थभिन्नभागेऽष्टावङ्का गृहीताः

सन्ति, येषु वामपार्श्वस्थं प्रथमम ङ्कचतुष्टयं क्रमिकसख्याशून्यदशांशोर्ध्वाधरपङ्क्त्योर्मध्ये विलिख्यावशिष्टमङ्कचतुष्टयं पूर्ववदेव लिखितमस्ति । एतावानेवात्र विशेषोऽस्ति । अन्यत्सर्वं यथापूर्वमेव वर्तते ।

नियमः – (२) अभीष्टसंख्याया अभिन्नभागे याङ्कसंख्या भवेत्तां रूपोनां कृत्वा शेषसंख्याद्योतकोऽङ्कस्तदभीष्टसंख्यालघुरिक्थस्याभिन्नभागे विलेख्यः । यथा २५२१, अथवा २५२१·०, अस्याः संख्याया लघुरिक्थं ३·४०१५७२८ इदं भवति । अत्रोक्तसंख्याभिन्नभागेऽङ्कसंख्या ४ वर्तते अतस्तल्लघुरिक्थाभिन्नभागे ३ अयमङ्को लिखितोऽस्ति ।

नियमः—(३) काचित् संख्या दशभिस्तदीयवर्गादिघातैर्वा गुणिता चेद् गुणनफलसंख्यानां लघुरिक्थभिन्नभागा मूलसंख्यालघुरिक्थभिन्नभागेन तुल्या एव भवन्ति । एवमेव काचित्संख्या दशभिस्तदीयवर्गादिघातैर्वा विभक्ता चेद् भागफलसंख्यानां लघुरिक्थभिन्नभागा मूलसख्यालघुरिक्थभिन्नभागेन समा भवन्ति । केवलमत्र (२) नियमानुसारेण तत्तत्सख्यालघुरिक्थाभिन्नभागेष्वेव विभेदो भवति । यथा—

३४ अस्याः संख्याया लघुरिक्थ				=	१·५३१४७८६
३४०	,,	,,	,,	=	२·५३१४७८६
३४००	,,	,	,,	=	३·५३१४७८६
३४०००	,,	,,	,,	=	४·५३१४७८६
३·४	,,	,,	,,	=	०·५३१४७८६
०·३४	,,	,,	,,	=	$\overline{१}$.५३१४७८९
०·०३४	,,	,,	,,	=	$\overline{२}$.५३१४७८६
०·००३४	,,	,,	,,	=	$\overline{३}$.५३१४७८६ इत्यादि

ऋणगता पूर्णाङ्कसख्या यदा भवति तदा ऋणचिह्नं पूर्णाङ्कसंख्योपरि लिख्यते । अत्र लघुरिक्थस्य पूर्णाङ्कसंख्यैव केवलमृणगता भवति । तदग्रवर्ती भिन्नभागस्तु धनगत एव भवति । रूपोनं शून्यमृणरूपेण समं भवतीत्यतो यस्य दशमलवभिन्नस्याभिन्नभागे शून्यं भवति, तल्लघुरिक्थभिन्नभागे $\overline{१}$ एवं ऋणरूपं लिख्यते । एवमेव यस्य दशमलवभिन्नस्याभिन्नभागे तद्दशांशस्थानेऽपि च शून्यं भवति तल्लघुरिक्थाभिन्नभागे $\overline{२}$ एवमृणरूपद्वयं लिख्यते । एवमग्रेऽपि ज्ञेयम् । यथा दशमलवविन्दुतोदक्षिणभागे शून्यद्वयं चेत्तदभिन्नभागे $\overline{३}$ विलेख्यमित्यादि ।

अथ कस्याश्चिदपि संख्याया लघुरिक्थज्ञानस्य विधिः

नियमः – (४) यस्यां संख्यायामङ्कत्रयतोऽधिका अङ्का न भवन्ति तल्लघुरिक्थभिन्नभागस्तत्संमुखे सारण्या लिखित एव लेख्यः । तदभिन्नभागस्तु (२) नियमानुसारेण लेखनीयो भवति । यथा ·३ अस्याः संख्याया लघुरिक्थ १̄·४७७१२१३ इदम्, ५३·१ अस्याश्च १ ७२८३५३८ इदं भवति । एवं यस्यां संख्यायामङ्कचतुष्टयं भवति तल्लघुरिक्थभिन्नभागस्तत्संमुखस्य शून्यदशांशाधःस्थितश्च भवति । यथा—१९२·६ अस्याः संख्याया लघुरिक्थं २·२८५३३२२ इदं भवति, तथैव ·०१९२६ अस्याश्च २̄·२८५३३२२ इदं भवति । तथैव यस्यां संख्यायामङ्कपञ्चकं भवति, तल्लघुरिक्थभिन्नभागो वामपार्श्वस्थक्रमिकसंख्याङ्कचतुष्टयस्य संमुखस्थो दशांशाङ्कानां तिर्यक्पङ्क्तिस्थितस्य तत्संख्यापञ्चमाङ्कस्याधःस्थितश्च भवति । तदभिन्नभागस्तु पूर्ववल्लेख्यो भवति । यथा—३९५३३ अस्याः संख्याया लघुरिक्थ ४·५९७००३७ इदम्, ·६३११८ अस्याश्च १̄·८००१५३२ इदं भवति ।

नियमः—(५) यस्यामभीष्टसंख्यायां पञ्चाधिका अङ्का भवन्ति तल्लघुरिक्थज्ञानाय पूर्वमभीष्टसंख्याया वामपार्श्वस्थप्रथमाङ्कपञ्चकस्य लघुरिक्थं विलेख्यम् । ततस्तदग्रिमपञ्चाङ्कविशिष्टसंख्याया लघुरिक्थं विलिख्य तयोरन्तरं कार्यम् । ततोऽभीष्टसंख्यायाः पञ्चमाङ्कतोऽग्रे येऽङ्का भवन्ति तान् दशमलवस्थानीयानङ्कान् प्रकल्प्य तैः पूर्वोक्तान्तरे गुणिते गुणनफलस्याभीष्टसंख्याया वामपार्श्वस्थपञ्चाङ्कानां पूर्वानीतलघुरिक्थे सयोजनेन योगफलमभीष्टसंख्याया लघुरिक्थं भवति ।

उदाहरणम् (१)

५६७८९४ अस्याः संख्याया लघुरिक्थं किं स्यात् ?

अत्र, ५६७८९ अस्याः संख्याया लघुरिक्थम् =५·७५४२६४२

५६७९० ,, ,, ,, =५·७५४२७१९

द्वयोरन्तरम् वा पूर्वापरान्तरम् = ७७

अतः ७७ × ·४ =३०·८ = ३१ दशमलवनियमेन

∴ ५·७५४२६४२
 + ३१
―――――――――
५·७५४२६७३ = इष्टसंख्याया लघुरिक्थम् ।

उदाहरणम् (२)

१ २ ३ · ४ ५ ६ ७ अस्याः संख्याया लघुरिक्थं किं भवेत् ?

अत्र, १ २ ३ · ४ ५ अस्याः संख्याया लघुरिक्थम् = २ · ० ६ १ ४ ६ १ १

१ २ ३ · ४ ६ ,, ,, ,, = २ · ० ६ १ ५ २ ६ ३

द्वयोरन्तरं वा पूर्वापरान्तरम् = ३ ५ २

अतः, ३ ५ २ × · ६ ७ = २ ३ ५ ८ ४ = २ ३ ६

∴ २ · ० ६ १ ४ ६ १ १
+ २ ३ ६

२ · ० ६ १ ५ १ ४ ७ = अभीष्टसख्यालघुरिक्थम् ।

अथ लघुरिक्थस्य संख्याज्ञानविधिः

नियमः—(६) कस्याचदभीष्टलघुरिक्थस्य संख्यायां तल्लघुरिक्थस्यैकाधिकपूर्णाङ्कसंख्यापरिमितानङ्कान् गृहीत्वा गणिते सूक्ष्मतार्थं तदग्रे दशांशशतांशस्थानीयौ द्वावङ्कावपि ग्रहीतव्यौ। तदर्थं ६ पृष्ठतः १८५ तमपृष्ठं यावदस्य सारणीभागस्योपयोगो भवति । तथाहि—पूर्वमभीष्टलघुरिक्थस्य वामपार्श्वस्थं प्रथममङ्कत्रयं सारण्यामन्विष्य तद्यत्र लिखितमुपलभ्यते तत्र तत्संमुखतिर्यक्पंक्तौ तदधःस्थितायां वा यस्यां तिर्यक्पंक्तौ तदवशिष्टाङ्कचतुष्कं तदासन्नं वा लिखितं भवति, तत्तिर्यक्पंक्तिवामपार्श्वस्था क्रमबद्धसंख्यैव तल्लघुरिक्थसंख्या भवति। एवमत्र तत्संख्यायामङ्कचतुष्कमुपलब्धं भवति । यदि चात्राङ्कपञ्चकमपेक्ष्यते, तदोक्तावशिष्टाङ्कचतुष्टयोपरिगतो दशांशाङ्कस्तिर्यक्पंक्तिस्थोऽङ्को ग्राह्यः । पञ्चतो न्यूना अङ्काः संख्यायामपेक्षिताश्चेदेतदङ्कपञ्चकत एवाभीष्टाङ्का ग्राह्याः । किन्त्वत्रान्तिमाङ्कस्य सूक्ष्मतार्थमेकाधिकाभीष्टाङ्का गृह्यन्ते, तदधिकाङ्कस्य च चतुःसंख्यातोऽधिकत्वेऽन्तिमाङ्के रूपं संयोज्य सोऽधिकाङ्कः परिमार्जनीयः। यथा, १·५४११५६८ अस्य लघुरिक्थस्य ३४·७७ इयं सख्या भवति, ०·६३११२२०, अस्य च ४·२८ इयं भवति ।

नियमः—(७) लघुरिक्थसख्यायां पञ्चतोऽधिकाङ्का अपेक्ष्यन्ते चेदभीष्टलघुरिक्थतो न्यूनं तदासन्न च लघुरिक्थं विलिख्य तत्संख्या विलेख्या। तत एतन्न्यूनलघुरिक्थस्य तदग्रिमलघुरिक्थस्य चान्तरं कार्यम् । इदमेव पूर्वापरान्तर

भवति। तच्च (क) संज्ञं कल्प्यम्। एवमभीष्टलघुरिक्थतन्न्यूनलघुरिक्थयोरन्तरं (ख) संज्ञं कल्प्यम्। अथाभीष्टलघुरिक्थसंख्यायां यावन्तः पञ्चतोऽधिकाङ्का अपेक्ष्यन्ते तावन्ति शून्यानि १ अस्याग्रे विलिख्य तेन (ख) संज्ञमन्तरं गुणनीयम्। ततोऽस्मिन् गुणनफले (क) संज्ञकपूर्वापरान्तरेण विभक्ते लब्धाङ्का लघुरिक्थ-संख्यायाः पञ्चमाङ्कानन्तरवर्तिनोऽङ्का भवेयुः। एवं लघुरिक्थसख्यायां यथेष्टमङ्का ग्रहीतुं शक्यन्ते।

उदाहरणम्

यस्याः सख्याया लघुरिक्थं ३·६२११६०६, इदमस्ति तदङ्कषट्कविशिष्टा संख्या का स्यात् ?

अत्र, पूर्णाङ्कसंख्या ३, अत एकाधिकपूर्णाङ्कसंख्यापरिमिताङ्काः ४, दशांश-शतांशस्थानीयौ द्वावङ्कौ, अन्तिमाङ्कस्य सूक्ष्मतार्थमेकोऽधिकोऽङ्कश्चेति सप्ताङ्का ग्रहीतव्याः सन्ति। अथ, अभीष्टलघुरिक्थतो न्यून तदासन्नं च सारणीस्थं—

लघुरिक्थम्	= ३·६२११५५५	अस्य संख्या = ४१७९·८
तदग्रिमं लघुरिक्थम्	= ३·६२११६५६	
द्वयोरन्तरम्पूर्वापरान्तरं वा	= १०४ = (क)	
एवंन्यूनलघुरिक्थम्	= ३·६२११५५५	
इष्टलघुरिक्थम्	= ३·६२११६०६	
उभयोरन्तरम्	= ५१ = (ख)	

अत्र पञ्चाङ्कतोऽधिकमङ्कद्वयं ग्राह्यमस्ति, अतः १ अस्योपरि शून्यद्वयं विलिख्य १०० अनेन (ख) अन्तरे गुणिते गुणनफले च (क) पूर्वापरान्तरेण विभक्ते लब्धिः ४९, अतोऽभीष्टलघुरिक्थस्य ४१७९·८५ इयं सख्या भवति। अत्र सप्तमाङ्कस्य ९ इत्यस्य चतुः संख्यातोऽधिकत्वेन तत्पूर्ववर्ती शतांशस्थानीयोऽङ्क एकाधिको गृहीतोऽस्ति।

अथेष्टचापस्य लघुरिक्थीयज्यास्पर्शरेखादिज्ञानस्य प्रकारः

एतदर्थं २०३ तमपृष्ठतः २४७ तमपृष्ठं यावच्चेम्बर्सलघुरिक्थसारणीभाग उपयुज्यते। अस्यां सारण्या प्रत्येककलायाः सूक्ष्मा लघुरिक्थीयज्यास्पर्शरेखादयो

लिखिताः सन्ति, येन तत्परस्परगुणनभजने तद्योगान्तराभ्यामेव क्रमेण सम्पादयितुं शक्येते। ज्यौतिषसिद्धान्तग्रन्थेषु ज्योत्पत्तिविधिना साधितज्यादितस्तत्र पठित-ज्याद्यन्तरानुपातेन साधितमभीष्टचापस्य ज्यादिकं स्थूलं तत्परस्परगुणनादिकं च गौरवान्वितं भवति। अतो गणिते चेम्बर्ससारण्या उपयोगकरणेन तत्र लाघवं सूक्ष्मता च सम्पद्यते।

(१) अस्यां सारण्यां शून्यतः पंचचत्वारिंशदंशान्यावत्प्रत्येकमंशं पृष्ठस्य वामपार्श्वे सर्वोपरिभागे विलिख्य तदधोगतायां वामपार्श्वस्थान्तिमोर्ध्वाधरपंक्तौ १ तः ६० पर्यन्तं सर्वाः तत्कला ऊर्ध्वाधरक्रमेण लिखिताः सन्ति। प्रत्येककलायाः संमुखस्थतिर्यक्पंक्तौ क्रमशो ज्या, कोटिच्छेदनरेखा, स्पर्शरेखा, कोटिस्पर्शरेखा, छेदनरेखा, कोटिज्या च लिखितास्ति। एषु ज्यादिषु ज्याकोटिच्छेदनरेखयोः, स्पर्शरेखा-कोटिस्पर्शरेखयोः, छेदनरेखाकोटिज्ययोश्च पूर्वापरान्तरमेक एव यतो भवति, अतस्त-दुभयोर्मध्यभाग एव तल्लिखितमस्ति। एवमेव पञ्चचत्वारिंशदंशतो नवत्यंशान् यावत्प्रत्येकमंशं पृष्ठस्य दक्षिणपार्श्वे सर्वाधोभागे विलिख्य तदुपरिस्थितायां दक्षिणपार्श्वस्थान्तिमोर्ध्वाधरपंक्तावुपर्युपरि क्रमेण १ तः ६० पर्यन्तं सर्वाः तत्कला विलिखिताः सन्ति। एवं पञ्चचत्वारिंशदंशतोनवत्यंशान्यावत्तज्ज्यादिकानामुल्ले-खस्तदधोभागे दक्षिणतो वामभागे पूर्वोक्तक्रमेणैव लिखितोऽस्ति। एवमस्यां सारण्यां ० तः ९० अंशान्यावत्प्रत्येकांशस्य तदग्रिमवर्तिकलानाञ्च लघुरिक्थीयज्यादिकं लिखित्वा तद्भिन्नभागे सूक्ष्मतार्थमङ्कसप्तकं लिखितमस्ति।

यथा,	२४°।३२′	अस्य	चापस्य	ज्या	=	६·६१८२८०१
	३६°।१५′	,,	,,	स्पर्शरे०	=	९·८६५२४०४
	५३°।३०′	,,	,,	को०स्प०रे०	=	९·८६९२०८९
	६३°।२०′	,,	,,	को०छे०रे०	=	१०·०४८८४१०

अथ विकलान्तचापस्य ज्यास्पर्शरेखाद्यानयनप्रकारः

(२) कस्यचिदभीष्टविकलान्तचापस्यांशकलानां ज्यादिकं पूर्वोक्तप्रकारेण विलिख्य तत्पूर्वापरान्तरं विकलासंख्यया गुणनीयम्। गुणनफलञ्च षष्ट्या विभज्य लब्धफलस्याभीष्टचापस्यांशकलानां क्रमशः प्रवर्धमानासु ज्यास्पर्शरेखाछेदनरेखासु

संयोजनेन कोटिच्छेदनरेखाकोटिस्पर्शरेखाकोटिज्याभ्यश्चोत्तरोत्तरं क्षीयमाणेभ्यस्तस्य विशोधनेनाभीष्टविकलान्तचापस्य ज्यादिकं भवति ।

उदाहरणम् (१)

३६°।४०′।५०″·२ अस्य चापस्य लघुरिक्थीयज्यां वद ।

अत्र सारणीतः ३६°।४०′ अस्य चापस्य ज्या = ९ · ७ ६ ५ ७ १ ९ ७

तत्पूर्वापरान्तरं $१७६० \times \frac{५०·२}{६०}$ = + १ ४ ७ ३

∴ ३६°।४०′।५०″·२ अस्य चापस्य ज्या = ९ · ७ ६ ५ ८ ६ ७ ०

उदाहरणम् (२)

५३°।२०′।२४″·५ अस्य चापस्य कोटिस्पर्शरेखां वद ।

अत्र, ५३°।२०′ अस्य चापस्य कोटिस्पर्शरेखा = ९ · ८ ७ १ ८ ४ ८ ३

तत्पूर्वापरान्तरम् $२६३८ \times \frac{२४''·५}{६०}$ = −१ ० ७ ७

∴ ५३°।२०′।२४″·५ अस्य चापस्य को.स्प.रे. = ९ · ८ ७ १ ७ ४ ० ६

अत्र, ६० विकलाभिः पूर्वापरान्तरं लभ्यते तदेष्टविकलाभिः कियदित्यनुपातेन विकलाफलमानीतमस्ति ।

अथ ज्यादिकस्य चापानयनप्रकारः

(३) ज्यास्पर्शरेखाछेदनरेखासु कस्या अप्येकतमायाः चापो ज्ञातुमभीष्टश्चेदभीष्टज्यादिकस्यासन्नं ततो न्यूनं च ज्यादिकं विलिख्य तस्यांशकला विलेख्याः । ततोऽभीष्टज्यादिकस्य ततो न्यूनस्य तदासन्नस्य ज्यादिकस्य चान्तरं षष्टचा संगुण्य गुणनफले पूर्वोक्तज्यादिकस्य पूर्वापरान्तरेण विभक्ते लब्धफलमभीष्टचापस्याभीष्टविकला भवन्ति । किन्तु कोटिज्याकोटिस्पर्शरेखाकोटिच्छेदनरेखासु कस्या अप्येकतमायाः चापो ज्ञातव्यश्चेदत्राभीष्टकोटिज्यादिकतोऽधिकं तदासन्नं च कोटिज्यादिकं तस्यैव च पूर्वापरान्तरं गृहीत्वान्यत्सर्व गणितं पूर्ववदेव कार्यम् ।

उदाहरणम् (१)

६·९०४७४२३ अस्या ज्यायाः चाप वद ।

अत्र, इष्टज्यासन्ना ततो न्यूना च सारणीस्थज्या = ६·९०४७१०६ अस्याः चापः ५३°।२५′

अभीष्टज्या	=	६·९०४७४२३
अनयोरन्तरम्	=	३१७
अत्राभीष्टज्यासन्नज्यायाः पूर्वापरान्तरम्	=	९३७

$\therefore \frac{३१७ \times ६०}{९३७} = २०''·३$ ।

अतोऽभीष्टज्याचापः = ५३°।२५′।२०″·३ ।

उदाहरणम् (२)

१०·१३४६७२३ अस्याः कोटिस्पर्शरेखायाः चापं वद ।

अत्र, इष्टकोटिस्पर्शरेखासन्ना ततोऽधिका च

सारणीस्था कोटिस्पर्शरेखा	=	१०·१३४७५९६ अस्याः चापः ३६°।१५′
अभीष्टा कोटिस्पर्शरेखा	=	१०·१३४६७२३
द्वयोरन्तरम्	=	८७३
अत्राधिककोटिस्पर्शरेखायाः पूर्वापरान्तरम्	=	२६४९

अतः, $\frac{८७३ \times ६०}{२६४९} = १९''·८$

अत इष्टकोटिस्पर्शरेखाचापः = ३६°।१५′।१९″·८

अत्र पूर्वापरान्तरेण षष्टिकला लभ्यन्ते तदेष्टान्तरेण किमित्यनुपातेन पूर्वोक्तं लब्धिफलमानीतमस्ति ।

अथ कस्यचित् सूक्ष्मचापस्य ज्यास्पर्शरेखाज्ञानस्य प्रकारः

(४) ज्यादिकानां गतिः प्रतिक्षणं विलक्षणैव यतो भवति, अतो येषां विकलान्तचापानां मानानि ३°।१५′ अतोऽधिकानि न भवन्ति तेषां ज्याः, स्पर्शरेखाश्च

यदि पूर्वोक्तानुपातेन साध्येरन्, तदा तासां ज्यास्पर्शरेखाणां पूर्वापरान्तराणां पृथुत्वात्ताः स्थूला भवेयुः। अत ईदृशाना सूक्ष्मचापानां ज्याः, स्पर्शरेखाश्चाधोलिखितप्रकारानुसारत एव साधनीयाः। यथाहि—अभीष्टसूक्ष्मचापस्यांशादिकं सवर्णनविधिना विकलासु परिणमय्य तासां विकलानां लघुरिक्थं विलेख्यम्। तस्मिन् ४·६८५५७४९ इदं स्थिरलघुरिक्थं सयोज्य ज्यासाधनार्थं, योगफलात्पूर्वोक्तचापच्छेदनरेखापूर्णाङ्कतो दशसंख्यां वियोज्य शेषस्य तृतीयांशो विशोधनीयः, स्पर्शरेखासाधनार्थं तु योगफले पूर्वोक्तशेषस्य द्वौ तृतीयांशौ संयोजनीयौ।

उदाहरणम्

१°।२५′।२०″ अस्य चापस्य सूक्ष्मज्यास्पर्शरेखे प्रसाध्येताम्।

अत्र, "अ" चापः = १°।२५′।२०″ = ५१२०″

अस्य लघुरिक्थम्	= ३·७०९२७००
स्थिरलघुरिक्थम्	= ४·६८५५७४९
योगफलम्	= ८·३९४८४४९
$\frac{१}{३}$ (छे अ—१०) = —$\frac{१}{३}$ × ०·०००१३३८	= —०·००००४४६
∴ "अ" चापस्य सूक्ष्मज्या	= ८·३९४८००३
अथ सूक्ष्मस्पर्शरेखाज्ञानार्थं, उक्तयोगफलम्	= ८·३९४८४४९
+ $\frac{२}{३}$ (छे अ—१०)	= +०·००००८९२
∴ "अ" चापस्य सूक्ष्मस्पर्शरेखा	= ८·३९४९३४.१

अत्रेदमवगन्तव्यम् यत्कस्यचिच्चापस्य कोटिज्याकोटिस्पर्शरेखे तत्कोटिचापस्य क्रमेण ज्यास्पर्शरेखे यतो भवतः, अतो येषां चापानां मानानि ८९°।४५′, अतो न्यूनानि न भवन्ति तेषां सूक्ष्मकोटिज्याकोटिस्पर्शरेखाणां कृते क्रमेण तत्कोटिचापसूक्ष्मज्यास्पर्शरेखा एव ग्राह्याः।

अथाभीष्टज्यास्पर्शरेखाणां सूक्ष्मचापज्ञानस्य विधिः

(५) अभीष्टज्यास्पर्शरेखालघुरिक्थयोः ५·३१४४२५१ इदं स्थिरलघुरिक्थं संयोज्य योगफलमनष्टं स्थाप्यम्। ततोऽभीष्टज्यास्पर्शरेखयोः चापौ पूर्वोक्तप्रकारेण ज्ञात्वा तच्चापच्छेदनरेखयोः पूर्णाङ्कसंख्ये दशोनिते कार्ये। ततो ज्याचाप-

ज्ञानार्थ शेषस्य तृतीयांशः पूर्वोक्तयोगफले संयोज्यः, स्पर्शरेखाचापज्ञानार्थं चोक्तशेषस्य द्वौ तृतीयांशौ पूर्वोक्तयोगफलाद्विशोधनीयौ ।

उदाहरणम्

८·४८३२४६२ ८·४८३४४७३, अनयोर्ज्यास्पर्शरेखयोः सूक्ष्मचापौ वद ।

अत्र पूर्वोक्तप्रकारेणोक्तज्यास्पर्शरेखयोः चापांशादि = १°।४४′।३६″ स्वल्पान्तरात्,

अस्य छेदनरेखा च	=	१०·०००२०११ ।
∴ अभीष्टज्या	=	८·४८३२४६२
स्थिरलघुरिक्थम्	=	५̄·३१४४२५१
$\frac{१}{३}$ (छेदनरेखा—१०)	=	+ ०·०००0६७०
एषां त्रयाणां योगफलम्	=	३·७९७७३८३
अत्र योगफललघुरिक्थस्य संख्या	=	६२७६″·८ विकलाः ।

अतोऽभीष्टज्याचापः = १°।४४′।३६″·८ ।

अथ स्पर्शरेखाचापज्ञानार्थं,

अभीष्टस्पर्शरेखा	=	८·४८३४४७२
स्थिरलघुरिक्थम्	=	+ ५·३१४४२५१
योगः	=	३·७९७८७२३
—$\frac{२}{३}$ (उक्तच्छेदनरेखा – १०)	=	— ०·०००१३४१
अन्तरम्	=	३·७९७७३८२
अन्तरफललघुरिक्थसख्या	=	६२७६″·८ विकलाः ।
अतोऽभीष्टस्पर्शरेखाचापः	=	१°।४४′।३६″·८ ।

अथ घातमापकषड्विधम्

(१) घातमापकभिन्नभागानां योगान्तरक्रियाऽभिन्नसंख्यावदेव भवति । परं तदभिन्नभागानां योगान्तरमव्यक्तगणितरीत्यैव भवति ।

यथा, योज्यः	३̄·४२७१४१६	वियोज्यः	२̄·३२६८०६८
योजकः	२·९९३४३३९	वियोजकः	५̄·७५८४५७७
योगफलम्	०·४२०५७५५	अन्तरम्	२·५६८३४९१

(२) गुणनक्रिया यथा, $\overline{\text{३}}$·७८५६०७३ गुण्यः
६ गुणकः

$\overline{\text{१४}}$·७१३८८३८ गुणनफलम्

अत्रगुणकस्याभिन्नभागे गुणकेन गुणिते गुणनफलं $\overline{\text{१८}}$, अस्मिन्पूर्वगुणनफलस्य वामपार्श्वस्थाङ्कस्य ४

अस्य योजनेन $\overline{\text{१८}}$+४=$\overline{\text{१४}}$ अयं गुणनफलाभिन्नभागो भवति। अत्र गुणकस्याभिन्नसंख्याज्ञेया।

(३) भागहारो यथा, $\overline{\text{६}}$·३२४६८४६ ÷ ३ = $\overline{\text{२}}$·१०८२२८२।

अत्र भागक्रिया दशमलवभिन्नवदेव भवति। किन्तु यत्र भाज्यस्य ऋणगतोऽभिन्नभागोभाजकेन निःशेषो न भवति, तत्र यस्याः संख्याया योजनेन सनिःशेषः स्यात्, तां सख्यां अभिन्नभागं प्रकल्प्य तत्सहितभाज्यभिन्नभागे भाजकेन हृते यल्लभ्यते सलब्धेर्भिन्नभागो भवति। वर्धितेऽभिन्नभागे भाजकेन हृते लब्धेरभिन्नभागो ज्ञेयः। यथा,

$\overline{\text{१४}}$.३२६८४७२ ÷ ९ = $\overline{\text{२}}$.४८०७६०८। अत्र $\frac{\overline{\text{१८}}}{\text{९}}$ = $\overline{\text{२}}$ अयं लब्धेरभिन्नभागः।

$\frac{\text{४.३२६८४७२}}{\text{९}}$ = .४८०७६०८ अयं लब्धेर्भिन्नभागः। अत्रापिभाजकस्याभिन्नसंख्या ज्ञेया।

(४) घातक्रिया यथा, घातमापकस्य वर्गघनादिकं घाताङ्कघातमापकयोर्घातेन सम भवति। यथा, घा ८=०·९०३०९०० अस्मिन् चतुर्गुणिते ३·६१२३६०० = घा $\text{८}^{\text{४}}$ = घा ४०९६।

(५) मूलक्रिया यथा घातमापकस्य वर्गमूलघनमूलादिकं मूलाङ्केन घातमापके भक्ते भवति। यथा, घा $\text{३}^{\text{८}}$ वा घात ६५६१=३·८१६९७०० अस्मिन्नष्टभक्ते ०.४७७१२१३ = $\sqrt[\text{८}]{\text{६५६१}}$ = घा ३।

अथ पूर्वोक्तनियमानां व्याप्तिप्रदर्शनाय कानिचिदुदाहरणानि प्रदर्श्यन्ते

उदाहरणम् (१) यदि चेम्बर्ससारणीतः, घा २=·३०१०३००, घा ३= ·४७७१२१३, घा ७=·८४५०९८०, तदा ४२ अस्य घातमापकः कः?

अत्र ४२ = २ × ३ × ७, ∴ घा४२ = घा२ + घा३ + घा७ = ·३०१०३०० + ·४७७१२१३ + ·८४५०९८० = १.६२३२४९३ ।

उदा० (२) यदि घा५ = ·६९८९७००, तदा $\sqrt[3]{६.२५}$, अस्यघातमापकः प्रदर्श्यताम् ।

अत्र घा$(६·२५)^{\frac{१}{३}}$ = $\frac{१}{३}$ घा ६·२५ = घा $\frac{१}{३}$ घा $\frac{६२५}{१००}$ = $\frac{१}{३}$ (घा६२५—घा१००) = $\frac{१}{३}$ (घा$५^{४}$ − २) = $\frac{१}{३}$ (४घा५—२) = $\frac{१}{३}$(२·७९५८८००—२) = ·११३६६७१ ।

उदा० (३) यदि घा३ = ·४७७१२१३ तदा $३^{८५}$अस्य घातमापकस्य संख्यायां पूर्णाङ्कसंख्या का ? तथा $३^{-३७}$ अस्यघातमापकस्य संख्यायां दशमलवबिन्दोर्दक्षिणभागेकति शून्यानि स्युः ।

अत्र घा $३^{८५}$ = ८५ × घा ३ = ८५ × ·४७७१२१३ = ४० ५५५३१०५, अत्र रूपत्रयस्य पञ्चाशीतिघाते ४० + १ = ४१ इयं पूर्णाङ्कसंख्या स्यात् । एवं घा $३^{-३७}$ = —३७ × घा३ = — ३७ × ·४७७१२१३ = — १७.६५३४८८१, एतत्स्थाने यदि — १७—(१—·३४६५११९) एवं लिख्यते, तदाघा$३^{-३७}$ = — १७ — १ + ·३४६५११९ = $\bar{१८}$·३४६५११९, अस्य संख्यायामेकोनया ऋणगताभिन्नभागसंख्यया तुल्यानि शून्यानि दशमलवबिन्दोर्दक्षिणपार्श्वे भवन्तीतिनियमेनात्र १७ शून्यानिभवन्ति ।

अथ स्वाभाविकज्या कोटिज्यादिसम्बन्धानां निरूपणम्

अस्यां चेम्बर्ससारण्यां घातमापक ज्याकोटिज्यादिवत्स्वाभाविक ज्याकोटि ज्यादयोऽपि रूपव्यासार्धे स्वाभाविकदशमलवसंख्यायां लिखितास्सन्ति । अतो ज्याकोटिज्यानां सर्वदा रूपव्यासार्धाल्पत्वात्तद्दशमलवसंख्यापूर्णाङ्क स्थाने शून्यं भवति । किं चास्यां सारण्यां यत्र पूर्णाङ्कस्थाने शून्यं भवति, तत्र शून्यसहितः दशमलवबिन्दुर्न लिख्यते । यत्र च पूर्णाङ्कसंख्या रूपसमा ततोऽधिका वा भवति, तत्रैव दशमलवबिन्दुसहिता पूर्णाङ्कसंख्या लिख्यते । अत्राभीष्ट चापस्य स्वाभाविक ज्याद्यानयनप्रकारः स्वाभाविकज्यादितश्च तच्चापानयनप्रकारो घातमापक ज्यादिवदेव ज्ञेयः । अथैतासां घातमापक ज्याकोटिज्यानां स्वाभाविक ज्याकोटिज्यासु परिणामनाय घातमापक ज्यायाः कोटिज्याया वाऽभिन्नभागतो दशसंख्यां विशोध्य

शेषस्य पूर्वोक्त घातमापकनियमेन या संख्योपलभ्यते सा स्वाभाविकज्यायाः कोटिज्याया वाऽभिन्नभागः पूर्णाङ्कसंख्या वा भवति। घातमापकभिन्नभागस्योक्त-नियमेन या संख्या सा स्वाभाविकज्यायाः कोटिज्याया वा दशमलव भिन्नसंख्या भवति।

अत्रोदाहरणार्थं २०° अंशानां ९·५३४०५१७ अस्या घातमापकज्यायाः स्वाभाविकज्यायां परिवर्तनमभीष्टमस्ति। अत एतद्घातमापक ज्याया अभिन्न-भागः ९—१० = —१ अस्य संख्या ०, इयं स्वाभाविकज्यायाः पूर्णाङ्कसंख्या, एवं ·५३४०५१७ अयमुक्तघातमापकज्याभिन्नभागः, अस्योक्तनियमेन संख्या = ३४२०२०१ इयमेव स्वाभाविकज्याया दशमलवभिन्नसंख्या, अतः २०° अंशानां स्वाभाविकी ज्या = ० ३४२०२०१। एवमेव सर्वत्रवेद्यम्। अत्र स्वाभाविक ज्यादीनां योगान्तरादि दशमलवभिन्न संख्यावदेव भवतीत्यवगन्तव्यम्।

येषां कोणानां कश्चन ज्याकोटिज्यादि सम्बन्धः समानोभवति तेषां सर्वकोणसाधारणमानानयनम्।

तत्रादौ समानज्यासम्बन्धिकोणानां सर्वकोणसाधारणमानम्प्रदर्श्यते। (९ प्र. क्षे. द्रष्टव्भम्) अत्र किल, आद्यसमकोणीयस्य अ क ब कोणस्य चापीयमानं अकल्प्यते। तदा ज्या अ $= \frac{\text{ब मा}}{\text{क ब}}$। अथ यदा क ब रेखा अनुलोमं विलोमं वा सकृदसकृद्वा परिभ्रम्य पुनः स्वस्थानमियात्, तदा कोणोत्पादकरेखयोः स्थानविकाराभावात्केवलस्य केनचिद्गुणितस्य वा समकोणचतुष्टयस्य चापीयमाने-नाधिकस्य अ कोणस्य ज्या $\frac{\text{ब मा}}{\text{क ब}}$ एतावत्येव भवेत्। अथ π = समकोणद्वयस्य चापीयमनं ५३ प्रक्रमे निर्दिष्टमस्ति। अतोयदि क ब रेखा व संख्यावारमनुलोम विलोमं वा परिभ्रम्य स्वस्थानमियात्, तदा व गुणितेन (२ π) समकोण चतुष्टय-मानेनाधिकस्य अ कोणस्य ज्या $\frac{\text{ब मा}}{\text{क ब}}$ इयमेव भवेत्। अतः ज्याअ = ज्या (२ व π + अ), ∴ अ = २ व π + अ⋯⋯(१)

अथ कोणस्य तद्धीनसमकोणद्वयस्य च ज्या तुल्यैव भवतीति १८ प्रक्रमे प्रतिपादितम् । अतः अकोणस्य ज्यया तुल्यैव (π—अ) कोणस्य ज्या स्यात् । ततउक्तयुक्त्या २ व π अनेन युतस्य (π—अ) अस्य ज्या अकोण ज्यया तुल्यैव भवेत् । अतः ज्या अ = ज्या (२ व π + π —अ) = ज्या { (२ व + १) π —अ }, ∴ अ = (२व + १) π —अ........(२)

अथ अ = { न π + (—१)^{न} अ } ...(३), अस्मिन् तृतीयस्वरूपे सर्वेषां समानज्यादिसम्बन्धिकोणानामन्तर्भावो भवति । यथा यद्यत्र न संख्या समा स्यात् (कल्प्यतां न = २ व), तदा (— १)^{२व} = + १ । अत उत्त्थापनेनोक्ततृतीयस्वरूपं (१) अनेन समं भवति । यदि च न संख्या विषमा स्यात् कल्प्यतां न = २ व + १), तदा (— १)$^{२ व + १}$ = — १ । अत उत्त्थापनेनोक्ततृतीयस्वरूप (२) अनेन सम भवति । एतेन समानज्यासम्बन्धि सर्वकोणाना मानं न π + (—१)^{न} अ, एतन्मितं भवतीत्युपपद्यते । अत्र न संख्या शून्येन धनर्णगताभिरेक द्वयादि सख्याभिर्वा समाना भवितुमर्हति । इदमेव तृतीयस्वरूपं सर्वेषा समानकोटिच्छेदनरेखा सम्बन्धिकोणानां सर्वकोणसाधारणमानज्ञानायोपयुज्यते, येषां कोणानां ज्या समाना भवन्ति तेषां कोटिच्छेदनरेखाणामपि समत्वात् । अत्रेदमवधेयम्, यदा क ब रेखानुलोमं भ्रमेत्, तदा २ व π अस्य मानं धनं, यदा च सा विलोमं भ्रमेत्, तदा २ व π अस्यमानमृण-मवगन्तव्यमिति ।

येषां कोणाना कोटिज्यास्समानाभवन्ति तेषां सर्वकोणसाधारणमानानयनम् ।

यदि आ कोण आद्यसमकोणीयः स्यात्तदा तस्य कोटिज्या २ व π अनेन युतस्य अ कोणस्य कोटिज्यया तुल्यैव स्यादिति पूर्वोक्तप्रकारतः स्फुटम् । १७ प्रक्रमानुसारं अकोणकोटिज्यया तुल्यैव—अ अस्यकोटिज्या भवति । अतः २ न π अनेन युतस्य—अ अस्य कोटिज्या अकोणकोटिज्यया तुल्यैवेति स्फुटम् । अतः कोज्या अ = कोज्या (२ न π + अ) = कोज्या (२ न π — अ) ∴ अ = २ न π ± अ, इदं न वर्णे शून्येन धनर्णगताभिरेक द्वयादि संख्याभिर्वा समुत्त्थापिते समानकोटिज्यासम्बन्धि-सर्वकोण साधारणमानं सम्पद्यते । एवमिदमेव समानकोटिज्या सम्बन्धिसर्वकोण साधारणमानस्वरूपं सर्वेषां समानच्छेदनरेखासम्बन्धिकोणानां सर्वकोणसाधारण-मानज्ञानायोपयुज्यते ।

समान स्पर्शरेखा सम्बन्धिकोणानां सर्वकोणसाधारणमानानयनम् ।

अत्राद्यसमकोणीयस्य अ कोणस्य स्पर्शरेखा तृतीयसमकोणीयस्य (π + अ) अस्य स्पर्शरेखया अथवा समकोण चतुष्टयेनाढचस्य अ कोणस्य स्पर्शरेखया तुल्या यतो भवति, अतः स्प अ = स्प (२ व π + अ), $\therefore$ अ = २ व π + अ ...... (१)

एवं अ = स्प { २ व π + (π + अ) } = स्प { (२ व + १) π + अ}, $\therefore$ अ = (२ व + १) π + अ   (२)

तथैव अ = न π + अ .. (३) अस्मिन् तृतीय स्वरूपे सर्वेषामुक्त कोणानामन्तर्भावो भवति । यथा, यदा न संख्या समा, कल्प्यताम् न = २ व, तदोक्ततृतीयस्वरूपं (१) अनेन समभवति । यदा च न संख्या विषमा, कल्प्यताम् न = २ व + १, तदोक्ततृतीयस्वरूपं (२) अनेन सममिति स्पष्टम् । अत्रापि न संख्या शून्येन धनर्णगताभिरेकद्व्यादिसंख्याभिर्वा समा भवितुमर्हति । एवमिदमेव तृतीयस्वरूपं समानकोटिस्पर्शरेखा सम्बन्धिकोणाना सर्वकोणसाधारणमानज्ञानायोपयुज्यते । अत्रोदाहरणानि :—

उदा० (१) अकोणस्याधोनिर्दिष्टज्यादिभिस्समाना येषा कोणानां ज्यादयो भवन्ति तासां सर्वकोणसाधारणमानं निर्दिशत ।

(क) ज्या अ = $\frac{\sqrt{३}}{\sqrt{२}}$, अत्र ६०° अंशानां ज्या $\frac{\sqrt{३}}{२}$ एतन्निता, $\therefore$

ज्या अ = ज्या ६०° = ज्या $\frac{\pi}{३}$, अतः $\frac{\sqrt{३}}{२}$ एतत्समानज्यासम्बन्धिसर्वकोणसाधारणस्वरूपं

$= न\pi + (-१)^{न}\frac{\pi}{३}$ ।

(ख) कोज्या अ = $-\frac{१}{२}$, अत्र १२०° अंशानां कोटिज्या = $-\frac{१}{२}$, $\therefore$

कोज्या अ = कोज्या १२०° = कोज्या $\frac{२\pi}{३}$, अतः $-\frac{१}{२}$ एतत्समानकोटिज्यासम्बन्धिसर्वकोण साधारण स्वरूपं = २ न$\pi \pm \frac{२\pi}{३}$ । अत्र π = १८० ।

(ग) स्प अ $= \frac{१}{\sqrt{३}}$, अत्र स्प अ $= \frac{१}{\sqrt{३}} =$ स्प ३०° $=$ स्प $\frac{\pi}{६}$, अतः $\frac{१}{\sqrt{३}}$ एतत्स्पर्शरेखा सम्बन्धि सर्वकोणसाधारणस्वरूपं $=$ न $\pi + \frac{\pi}{६}$ ।

उदा० (२) ज्या^{२}अ $= \frac{१}{४}$, अत्र येषा कोणाना ज्याः अ कोणज्या तुल्याः, तेषा सर्वकोणसाधारण स्वरूप प्रदर्शयत । अत्र ज्या अ $= \pm\frac{१}{२}$, अत्रोर्ध्व चिह्नपक्षे, ज्या अ $= \frac{१}{२} =$ ज्या$\frac{\pi}{६}$ । अधरचिह्नपक्षे, ज्या अ $= -\frac{१}{२} =$ ज्या $\left(-\frac{\pi}{६}\right)$ । उभयोः स्वरूपयोरेकत्र सन्निवेशेन अ $=$ न $\pi \pm (-१)^{न}\left(-\frac{\pi}{६}\right) =$ न $\pi \pm \frac{\pi}{६}$ ।

उदा० (३) ज्या अ $= -\frac{१}{२}$, स्प अ $= \frac{१}{\sqrt{३}}$, अत्र येषां कोणाना ज्याः स्पर्शरेखाश्च अ कोणस्यनिर्दिष्ट ज्या स्पर्शरेखा तुल्याः स्युस्तेषां सर्वकोण साधारण मानमानीयताम् ।

अत्र यदा ज्या अ $= -\frac{१}{२}$, तदा ०° तः ३६०° पर्यन्तं अ कोणस्य २१०°, ३३०°, एतन्मानद्वयमेव संभवति । एवं यदा स्प अ $= \frac{१}{\sqrt{३}}$, तदा अकोणस्य ३०°, २१०° एतन्मान द्वयमेव संभवति । अतः अ कोणस्य २१०° $= \frac{७\pi}{६}$, एतन्मिते माने कल्पिते तस्य ज्या स्पर्श रेखे निर्दिष्ट ज्या स्पर्श रेखा तुल्ये भवतः । अतः अ कोणस्य सर्वकोण साधारणमानं $=$ २ न $\pi + \frac{७\pi}{६}$ ।

उदा० (४) (२ न $-$ १)$\frac{\pi}{२} + (-१)^{न}\frac{\pi}{३}$, २ न $\pi \pm \frac{\pi}{६}$ एतत् स्वरूपद्वयेनाप्येकविधसमानकोटिज्या सम्बन्धिसर्वकोणानिर्दिश्यन्त इति समर्थ्यताम् ।

अत्र प्रथमस्वरूपं (२ न $-$ १)$\frac{\pi}{२} + (-१)^{न}\left(\frac{\pi}{२} - \frac{\pi}{६}\right)$ एवमपि लिखितु शक्यते । अतो यदि न संख्या विषमा स्यात्, कल्प्यताम् न $=$ ३, तदोक्तस्वरूपं $=$ ३ $\pi - \frac{\pi}{२} - \frac{\pi}{२} + \frac{\pi}{६}$ । यदि च न संख्या समा, कल्प्यताम् न $=$ २, तदोक्त स्वरूपं $=$ २ $\pi - \frac{\pi}{२} + \frac{\pi}{२} - \frac{\pi}{६}$, इति प्रश्नोक्तमुपपद्यते ।

उदा० (५) २ ज्या^{२} य $+ \sqrt{३}$ कोज्या य $+ १ = ०$, अत्र य कोणस्य सर्व-कोणसाधारणमानं किम् ?

अत्रोक्तसमीकरणमेवमपिलिखितुं शक्यं $२ - २$ कोज्या^{२} य $+ \sqrt{३}$ कोज्या य $+ १ = ०$

किंवा २ कोज्या^{२} य $- \sqrt{३}$ कोज्या य $- ३ = ०$

किंवा (कोज्याय $- \sqrt{३}$) (कोज्या य $+ \sqrt{३}$) $= ०$

अतः कोज्या य $= \sqrt{३}$, वा $- \frac{\sqrt{३}}{२}$ । अत्र प्रथममानं न संभवति, कस्यापि कोणस्य कोटिज्यायारूपाल्पत्वात् । ततो यस्य कोणस्य कोटिज्या $- \frac{\sqrt{३}}{२}$ एतन्मिता तस्य लघुतममान $= १५०°$ वा $\frac{५\pi}{६}$ । अत. य कोणस्य सर्वकोण साधारणमानं $=$ $२ न \pi \pm \frac{५\pi}{६}$ । अत्र प्रतीत्यर्थं न $= ०$ कल्पिते य $= १५०°$, न $= १$ कल्पिते य $=$ $२ \times १ \times १८०° - \frac{५ \times १८०°}{६} = ३६०° - १५०° = २१०°$ । एवं न $= २$ कल्पिते य $=$ $२ \times २ \times १८० + \frac{५ \times १८०°}{६} = ८७०°$ इत्यादि कोणाना कोटिज्या $= - \frac{\sqrt{३}}{२}$ इय-मेव भवति ।

उदा० (६) स्प५ य $=$ कोस्प २ य, अत्र य कोणस्य सर्वकोणसाधारणमानं किम् ?

उक्तसमीकरणमेवमपि लिखितु शक्यते, स्प ५ य $=$ स्प$\left(\frac{\pi}{२} - २ य\right)$, अथोक्त नियमेन, $\left(\frac{\pi}{२} - २य\right)$ अस्य कोणस्य समान स्पर्श रेखा सम्बन्धि सर्वकोण साधारण-मान $= न\pi + \frac{\pi}{२} - २$ य, $\therefore$ ५य $= न\pi + \frac{\pi}{२} - २$ य, $\therefore$ य $= \frac{१}{७}\left(न\pi + \frac{\pi}{२}\right)$। एतादृशेषु त्रैकोणमितिक समीकरणेष्वज्ञातकोणमानस्याभिन्न संख्या सर्वकोण साधारणमानेनैव ज्ञायते ।

उदा० (७) ज्या ९ य $=$ ज्या य, अत्र ९ य $=$ य, $\therefore$ ९ य $= २ न\pi +$ य, $\therefore$ ८ य $= २ न\pi$, $\therefore$ य $= \frac{न\pi}{४}$ । अत्र प्रतीत्यर्थं, न मानं शून्यातिरिक्तं किमपि कल्पयितु शक्यम् । तदनुसार न $= १$, इति कल्पिते य $= ४५°$ । अस्य प्रश्नोक्त समीकरणे समुत्थापनेन ज्या $४०५° =$ ज्या $४५°$, इति १८ प्रक्रमस्य टिपण्योपपन्नं

भवति । अथवा कल्प्यताम् ज्याय = ज्या (π—९ य), इति समीकरणम् । अत्र य = २ नπ + (π — ९य), ∴ १० य = २ न π + π, ∴ य = $\frac{१}{१०}$(२ न + १) π ।

अत्र प्रतीत्यर्थ, न मानं समीकरणानुसारत: शून्यातिरिक्तं न किमपि कल्पयितुं शक्यते । तदनुसारं न = ०, इति कल्पिते य = १८° । तत उक्त समीकरणे यमानस्योत्त्थापनेन ज्या १८° = ज्या (१८०° – १६२°), इति भवति ।

श्रेढीव्यवहारे सर्वधनानयनं सरलत्रिकोणमितिरीत्या प्रदर्श्यते

कल्प्यताम्, अ, + अ + क, + अ + २ क, ······ {अ + (न – १) क}, इयं अ — कोणश्रेढी वर्तते, अत्रत्यसर्वकोणज्यायोगरूप सर्वधनमभीष्टम् । अत्र, आदि: = अ कोण:, चय: = क कोण:, पदं = न. सर्वधन = स ।

अत: स = ज्या अ + ज्या (अ + क) + ज्या (अ + २ क) + ··· + ज्या {अ + (न – १) क} ।

तत: २० प्रक्रमस्थ (झा) इत्यनुसारत:, २ ज्या अ × ज्या$\frac{क}{२}$ =

$$\text{कोज्या}\left(अ - \frac{क}{२}\right) - \text{कोज्या}\left(अ + \frac{क}{२}\right)$$

इतोऽग्र (न – १) संख्यां यावत् अ कोणे एकद्व्यादिगुणित क कोणस्य संयोजनेन,

$$२\ \text{ज्या}\ (अ + क) \times \text{ज्या}\frac{क}{२} = \text{कोज्या}\left(अ + \frac{क}{२}\right) - \text{कोज्या}\left(अ + \frac{३क}{२}\right),$$

$$२\ \text{ज्या}\ (अ + २\ क)\ \text{ज्या}\ \frac{क}{२} = \text{कोज्या}\left(अ + \frac{३क}{२}\right) - \text{कोज्या}\left(अ + \frac{५क}{२}\right),$$

....

२ ज्या {अ + (न – २) क} ज्या$\frac{क}{२}$ = कोज्या {अ + (न—$\frac{५}{२}$) क — कोज्या {अ + (न—$\frac{३}{२}$) क}, इत्युपान्तिमसमीकरणम्,

२ ज्या {अ + (न—१) क} ज्या$\frac{क}{२}$ = कोज्या {अ + (न—$\frac{३}{२}$) क }— कोज्या {अ + (न—$\frac{१}{२}$) क}, इत्यन्तिम समीकरणम् ।

ततः सर्व समीकरणयोगेन धनर्णचिह्नाङ्कित ममानपदानां नाशात्

$२ ज्या \frac{क}{२} . स = कोज्या \left(अ - \frac{क}{२}\right) - कोज्या \{ अ + (न - \frac{१}{२}) क \}$ अत्रै-कपक्षोराशिद्वयघातरूपः, अपरपक्षस्तु राशिद्वयान्तररूपोयोगान्तरपक्षः। अतो योगान्तरपक्षीयकोणद्वययोगार्धं घातपक्षीय एकः कोणः, अन्यस्तु तत्कोणद्वयान्तरार्धरूपो भवतीति २२ प्रक्रमस्थ टिप्पणीतो ज्ञायते। अत्र कोणद्वयम्, $अ - \frac{क}{२}$ । $अ + (न - \frac{१}{२}) क$ । अनयोर्योगार्ध $= अ + \left(\frac{न - १}{२}\right) क$, अन्तरार्ध $= \frac{न\ क}{२}$, अतः २२ प्रक्रमेण, $२ ज्या \frac{क}{२} . स = २ ज्या \left\{अ + \left(\frac{न - १}{२}\right) क\right\} \times ज्या \frac{न\ क}{२}$, $\therefore स = ज्या \left\{अ + \left(\frac{न - १}{२}\right) क\right\} \times न$, अनेन स्वरूपेण, व्येकपदघ्नचयोमुखयुक्स्यादित्यादि श्रीभास्करीयश्रेढीसर्वधनानयनसूत्रमुपपद्यते।

अथोक्तश्रेढीस्थ सर्वकोणानां कोटिज्यायोगः प्रदर्श्यते

$$अत्र,\ स = कोज्या\ अ + कोज्या\ (अ + क) + कोज्या\ (अ + २\ क) + \cdots \cdots + कोज्या\ \{अ + (न - १)\ क\}$$

ततः २० प्रक्रमस्थ (छा) इत्यनुसारतः, $२ कोज्या\ अ . ज्या \frac{क}{२}$

$$= ज्या \left(अ + \frac{क}{२}\right) - ज्या \left(अ - \frac{क}{२}\right),$$

$$२\ कोज्या\ (अ + क)\ ज्या \frac{क}{२} = ज्या \left(अ + \frac{३\ क}{२}\right) - ज्या \left(अ + \frac{क}{२}\right),$$

$$२\ कोज्या\ (अ + २\ क)\ ज्या \frac{क}{२} = ज्या \left(अ + \frac{५\ क}{२}\right) - ज्या \left(अ + \frac{३\ क}{२}\right),$$

....

$$२\ कोज्या\ \{अ + (न - २)\ क\} \cdot ज्या \frac{क}{२} = ज्या\ \{ अ + (न - \tfrac{३}{२})\ क \} - ज्या\ \{ अ + (न - \tfrac{५}{२})\ क \}$$ इत्युपान्तिम समीकरणम्,

$$२ \text{ कोज्या } \{ अ + (न - १) क \} \text{ ज्या}\frac{क}{२} = \text{ज्या } \{ अ + (न - \tfrac{१}{२}) क \} -$$

$$\text{ज्या } \{ अ + (न - \tfrac{३}{२}) क \} \text{ इत्यन्तिम समीकरणम्,}$$

सर्वेषां समीकरणानां योगेन, $२ स \times \text{ज्या}\frac{क}{२} = \text{ज्या } \{ अ + (न - \tfrac{१}{२}) क \}$

$$- \text{ज्या}\left(अ - \frac{क}{२}\right),$$

ततः पूववत् २१ प्रक्रमेण कोणद्वययोगान्तरार्धतः, $२ स \times \text{ज्या } \frac{क}{२}$

$$= २ \text{ कोज्या } \{ अ + \left(\frac{न - १}{२}\right) क \} \times \text{ज्या}\frac{न क}{२},$$

अतः $स = \text{कोज्या } \{ अ + \left(\frac{न - १}{२}\right) क \} \times न$, इत्युपपद्यते ।

अथ कीदृक् श्रेढ्याः सर्वधनं वर्गात्मकं, घनात्मकं, चतुर्घातरूपं वा भवतीति प्रदर्श्यते

(१) यस्याः श्रेढया आदिः १, चयः २ भवति, तस्याः नसंख्याकपदानां योगः न वर्गतुल्योभवति । यथा,

१	=	$१^२$, अत्र न = १
१ + ३	=	$२^२$, ,, न = २
१ + ३ + ५	=	$३^२$, ,, न = ३
१ + ३ + ५ + ७	=	$४^२$, ,, न = ४ इत्यादि ।

(२) यस्याः श्रेढया आदिः $\frac{न + १}{२}$, चयः १, तस्याः न संख्याकपदयोगः नवर्गतुल्यो भवति, यथा,

१	=	$१^२$, अत्र न = १
$१\tfrac{१}{२} + २\tfrac{१}{२}$	=	$२^२$, ,, न = २
२ + ३ + ४	=	$३^२$, ,, न = ३
$२\tfrac{१}{२} + ३\tfrac{१}{२} + ४\tfrac{१}{२} + ५\tfrac{१}{२}$	=	$४^२$, ,, न = ४
३ + ४ + ५ + ६ + ७	=	$५^२$, ,, न = ५ इत्यादि ।

(३) यस्याः श्रेढ्या आदिः १, चयः २(न+१), तस्याः नसंख्याकपद-योगः न घनसमो भवति । यथा,

१	=	१³, अत्र न = १
१+७	=	२³, ,, न = २
१+९+१७	=	३³, ,, न = ३
१+११+२१+३१	=	४³, ,, न = ४, इत्यादि ।

(४) यस्याः श्रेढ्या आदिः न, चयः २ न, तस्याः नसख्याकपदयोगः न घनतुल्यो भवति । यथा,

१	=	१³, अत्र न = १
२+६	=	२³, ,, न = २
३+९+१५	=	३³, ,, न = ३
४+१२+२०+२८	=	४³ ,, न = ४, इत्यादि ।

अत्र प्रत्येक श्रेढीपदानि न गुणितैकादिविषमांकश्रेढीपदतुल्यानि भवन्ति ।

(५) यस्याः श्रेढ्या आदिः (न² − न + १), चयः २, तस्या न संख्याक-पदयोगः न घनतुल्यो भवति । यथा,

१	=	१³, अत्र न = १
३+५	=	२³, ,, न = २
७+९+११	=	३³, ,, न = ३
१३+१५+१७+१९	=	४³, ,, न = ४, इत्यादि ।

(६) यस्याः श्रेढ्या आदिः $\frac{\text{न}^2\text{न}+}{२}$, चयः न, तस्याः न संख्याकपदयोगः न घनतुल्यो भवति । यथा,

१	=	१³, अत्र न = १
३+५	=	२³, ,, न = २
६+९+१२	=	३³, ,, न = ३
१०+१४+१८+२२	=	४³, ,, न = ४ इत्यादि ।

अत्र प्रत्येक श्रेढ्याः प्रथमपदमेकादि न संख्यान्त संकलितेन तुल्यं भवति ।

(७) यस्याः श्रेढ्या आदिः $(न - २)^{२}$, चयः ८, तस्याः न सख्याकपदयोगः न घनतुल्यो भवति । अत्र न मानं रूपातिरिक्तं कल्प्यम् ।

यथा,

$०+८ = २^{३}$, अत्र न = २

$१+९+१७ = ३^{३}$, ,, न = ३

$४+१२+२०+२८ = ४^{३}$, ,, न = ४, इत्यादि ।

(८)

$९ \overset{१}{+} १७ = ३^{३}$

$२५+३३+४१ = ५^{३}$

$४९+५७+६५+७३ = ७^{३}$

$८१+८९+९७+१०५+११३ = ९^{३}$ इत्यादि ।

अत्र प्रत्येकश्रेढ्या आदिः क्रमिकविषमांक श्रेढीपद वर्गरूपः, चयश्च ८ । तथात्र प्रत्येक संनिकृष्ट श्रेढीद्वयस्य सर्वपदयोगो द्वितीय श्रेढया आदेर्वर्गमूलस्य घनो भवति । अत्र क्रमिकविषमांकश्रेढी १ + ३ + ५ + ...एवं रूपा भवति ।

(९) यस्याः श्रेढ्या आदिः $न^{२}$, चयः $२ न^{२}$, तस्याः न संख्याकपदयोगः न चतुर्घातसमो भवति ।

यथा,

$१ = १^{४}$, अत्र न = १

$४+१२ = २^{४}$, ,, न = २

$९+२७+४५ = ३^{४}$, ,, न = ३

$१६+४८+८०+११२ = ४^{४}$, ,, न = ४, इत्यादि ।

अत्र प्रत्येक श्रेढ्याः पदानि नवर्गगुणितैकादि विषमांक श्रेढीपदतुल्यानि भवन्ति ।

अथ सूर्यकेन्द्रीयग्रहस्य भूकेन्द्रीयग्रहे परिणामनस्य प्रकारः

अत्र ग्रहस्य सूर्यकेन्द्रीयभोगः, मन्दकर्णः, सूर्य केन्द्रीयशरः, सायनसूर्यः, रविमन्दकर्णश्चैते पदार्था भारतीयनाविकपञ्चाङ्गतः (Indian Ephemeris and nautical Almanac) अवगन्तव्या भवन्ति। तत्र सूत्रम् :—

$$\frac{\text{र} \times \text{कोज्याशर} \times \text{ज्या}\,(\text{ह}-\text{स})}{\text{र} \times \text{कोज्याशर} \times \text{कोज्या}\,(\text{ह}-\text{स}) + \text{र}'} = \frac{\text{व}}{\text{ल}} = \text{स्प}\,\angle\text{क्ष},\ \text{ततः}\ \text{स} \pm \angle\text{क्ष}$$

= भूकेन्द्रीयग्रहभोगः।

अत्र र = ग्रहमन्दकर्णः, र × कोज्या शर = क्रान्तिवृत्तीय ग्रहमन्दकर्णः, ह = सूर्यकेन्द्रीयग्रहभोगांशाः, स = रवेस्सायनभोगः, र′ = रविमन्दकर्णः। एवं र, र′ अनयोर्माने सर्वदा धनगते ज्ञेये। किंच क्ष कोणस्य न्यूनकोणत्वात् $\frac{\text{व}}{\text{ल}}$ अत्र लब्धिप्रमाणं व, ल अनयोर्धनर्ण चिह्नानुसारमधोलिखितनियमैः प्रकल्प्य तस्य सायनरविभोगांशेषु संयोजनेन ग्रहस्य भूकेन्द्रीयभोगः प्रसाध्यः। तथाहि,

(१) यदा + व, + ल, तदा + ∠ क्ष = ∠ क्ष, अतः स + ∠ क्ष = ग्रहभोगः।

(२) यदा + व, — ल, तदा — ∠क्ष = (१८०° — ∠क्ष) अतः स + (१८०° — ∠क्ष) = ग्र. भो.।

(३) यदा — व, — ल, तदा + ∠क्ष = (१८०° + ∠क्ष), अतः स + १८०° + ∠क्ष) = ग्र. भो.।

(४) यदा — व, + ल, तदा — ∠क्ष = (३६०° — ∠ क्ष), अतः स + (३६०° — ∠क्ष) = ग्र. भो.।

अत्रोदाहरणम्। सं० २०२७ च. शु. १ भौमे तदनुसारेण ७-४-१९७० अस्मिन्दिने सूर्यकेन्द्रीयशुक्रभोगस्य भूकेन्द्रीयभोगे परिणामनमभीष्टमस्ति। भारतीयनाविकपञ्चाङ्गतः शुक्रस्योक्तदिने सूर्यकेन्द्रीयभोगः = ह = २८५° । ६′ । ४०″·३, ग्रहमन्दकर्णः = र = ०.७२७७२०४, सूर्यकेन्द्रीयग्रहशरः = — १° । ३७′ । ५२″·१,

सायनरविः = स = १६° । ३१' । ५८".०, रविमन्दकर्णः = र' = १.०००८८९०, एभ्यः शुक्रस्यभूकेन्द्रीयभोगः प्रसाध्यते ।

न्यासः, ह = २८५°।६'।४०".३	
—स = १६।३१।५८.०	
ह—स = २६८।३४।४२.३	प्रघातमापक र = +९·८६१६५६३
भुजः = ८८।३४।४२.३	कोज्याग्रहशर = +९·९९९८२४०
ज्या भुजः = −९.९९९८६६३	र × कोज्याग्रहशर = +९.८६१४८०३
र × कोज्याशर = +९.८६१४८०३	कोज्या भुजः = —०·३९४६०५१
व = −९.८६१३४६६	र × कोज्याशर = +९·८६१४८०३
ल = +९.९९२०९१७	द्वयोर्घातः = −८·२५६०८५४
स्प ∠ क्ष = ९.८६९२५४९	घातसंख्या = —०·०१८९३३७
अस्यचापः = −३६°।३०'।१०".६	र' = +१·०००८८९०
(४) नियमानुसारं ३६०।०।०.०	द्वयोर्योगः = +०·९८१९५५३
३२३।२९।४९.४	योगस्य प्रघातमापकः =
+स = +१६।३१।५८.०	+९·९९२०९१७ = ल

३४०।१।४७.४ = गणितागतोभूकेन्द्रीयशुक्रभोगः ।

३४०।१।५३.३ = तुलनार्थं नाविक पञ्चांगस्थः शुक्रभोगः ।

५.९ = अन्तरम् ।

अन्यदुदाहरणम् । विक्रम सं० २०२६ च० कृ० १३ शनौ तदनुसारेण ४-४-१९७० अस्मिन्दिने सूर्यकेन्द्रीयगुरुभोगस्य भूकेन्द्रीयभोगे परिणतिरपेक्ष्यते । उक्तदिने सूर्यकेन्द्रीयगुरुभोगः = ह = २३७°।४४'।२६"·९, तन्मन्दकर्णः = र = ५·३७७४२७, सूर्यकेन्द्रीय गुरुशरः = —०°।५२'।५१"·३, सायनरविः = स = १३°।३४'।४६".७, रविमन्दकर्णः = र' = १.०००४२६, एभ्योभूकेन्द्रीयगुरुभोगः प्रसाध्यते ।

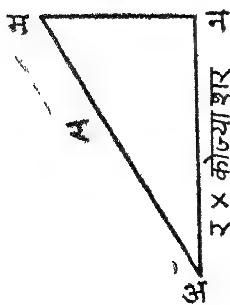
न्यासः, ह = २३७°।४४'।२६''·९
—स = १३।३४।४६·७
ह—स = २२४।६।४०·२
भुजः = ४४।६।४०·२
ज्याभुजः = —९·८४३०३१७
र × कोज्याशरः = + ०·७३०५२३२
व = —०·५७३५५५६
ल = —०·४५५९३६८
स्प ∠ क्ष = + ०·११७६१६१
अस्य चापः = ५२°।३६'।५६''·२
(३) नियमानुसारं + १८०।०।०·२
योगः = २३२।३६।५६·४
+स = १३।३४।४६·७

प्रघातमापक र = + ०·७३०५७४६
ग्रहकोज्याशर = + ६·६६६६४८७
र × कोज्याशर = + ०·७३०५२३२
कोज्याभुज = —६·८५५७५११
घातमापकद्वययोगः = — ०·५८६२७४३ = र × कोज्याशर
अस्यसख्या = —३·८५७२१७९
रे = + १·००००४२६
द्वयोर्योगः = —२·८५७१७५३
अस्यप्रघातमापकः = — ०·४५५६३६८ = ल

२४६।१४।४३·१ = गणितागतो भूकेन्द्रीयगुरुः
२४६।१४।५५·२ = तुलनार्थं नाविकपञ्चांगस्थो गुरुः
१२·१ = अन्तरम् ।

एवमेव यथावत्प्रघातमापकसंख्या, संख्यायाश्च प्रघातमापकोग्राह्यः । प्रघातमापकगणितस्य सम्यक् परिचयार्थमेवायं विषयोऽत्र संगृहीतः ।

क्षेत्रम् (१)



अथोक्तप्रकारस्योपपत्तिः । तत्र प्रथमं क्षेत्रम् ।

अस्मिन् जात्यत्र्यस्र, अ = रविस्थानम्, म = स्वीयकक्षावृत्तस्थग्रहस्थानम्, अ म = ग्रहमन्दकर्णः = र, ∠म अ न = सूर्य केन्द्रीयशरांशाः, मनविक्षेपवृत्तं अन क्रान्तिवृत्तोपरि लम्बरूपम्, अतः ∠ म न अ = समकोणः,

अतः भू ब = भू अ + अ ब = र × कोज्याशरः × कोज्या (ह — स) + र′ = ल ··············· (२)

अथ ल: व:: १: स्प ∠ ग्र भू ब = $\frac{\text{व}}{\text{ल}}$ =

$$\frac{\text{र} \times \text{कोज्याशरः} \times \text{ज्या (ह — स)}}{\text{र} \times \text{कोज्याशरः} \times \text{कोज्या (ह — स)} + \text{र}'},$$

इत्थं ∠ग्रभूब कोणमानेऽवगते तस्य सायनरविभोगांशेषु संयोजनेन ग्रहस्य भूकेन्द्रीयभोगांशा ज्ञेयाः। अथात्र क्रान्तिवृत्तीयग्रहमन्दकर्णः अग्र′ग्र जात्यत्र्यस्रतो ज्ञेयः।

यथा, ग्र′ = स्व कक्षावृत्तीय ग्रहस्थानम्, ग्र′ ग्र = ग्रहशरः, अग्र′ = ग्रहमन्दकर्णः = र,

अतः प्रथमक्षेत्रवत् अग्र = क्रान्तिवृत्तीयग्रहमन्दकर्णः = र × कोज्याशरः।

अथ कोणस्य ज्या कोटिज्याभ्यां केनचिद्गुणितस्य तस्य कोणस्य ज्या कोटिज्ययोरानयनम्

(१) यदि यस्य कस्यापि कोणस्य द्योतकः अ स्यात्, अभिन्नायाभिन्नाया धनगताया ऋणगताया वा सख्यायाद्योतकः न स्यात्, तदा $(\text{कोज्या अ} \pm \sqrt{-१}\ \text{ज्या अ})^{\text{न}}$ = कोज्या न अ ± $\sqrt{-१}$ ज्या न अ, अयं सिद्धान्तो महागणकेन डेमायवराख्येन (Demoivre) कृतः। अतोऽयं डेमायवरसिद्धान्त उच्यते। अस्योपपत्तिः। तत्र तावदादौ $(\text{कोज्या अ} \pm \sqrt{-१}\ \text{ज्या अ})^{२}$ = (कोज्या अ ± $\sqrt{-१}$ ज्या अ) × (कोज्या अ ± $\sqrt{-१}$ ज्या अ) = $\text{कोज्या}^{२}$ अ − $\text{ज्या}^{२}$ अ ± $\sqrt{-१}$.२ ज्या अ. कोज्या अ = कोज्या २ अ ± $\sqrt{-१}$ ज्या २ अ (२३ प्र० द्र०)। एवं $(\text{कोज्या अ} \pm \sqrt{-१}\ \text{ज्या अ})^{३}$ = $(\text{कोज्या अ} \pm \sqrt{-१}\ \text{ज्या अ})^{२}$ × (कोज्या अ ± $\sqrt{-१}$ ज्या अ) = (कोज्या २ अ ± $\sqrt{-१}$ ज्या २ अ) × (कोज्या अ ± $\sqrt{-१}$ ज्या अ) = कोज्या २ अ. कोज्या अ — ज्या २ अ. ज्या अ ± $\sqrt{-१}$ ज्या २ अ. कोज्या अ ±

कोज्या २ अ. $\sqrt{-१}$ (ज्या अ) = कोज्या (२ अ + अ) ± $\sqrt{-१}$ ज्या (२ अ + अ) = कोज्या ३ अ ± $\sqrt{-१}$ ज्या ३ अ (१६ प्र. द.)। एवमग्रेऽपि (कोज्या अ ± $\sqrt{-१}$ ज्या अ)^{४} = कोज्या ४ अ ± $\sqrt{-१}$ ज्या ४ अ, (कोज्या अ ± $\sqrt{-१}$ ज्या अ)^{५} = कोज्या ५ अ ± $\sqrt{-१}$ ज्या ५ अ इत्यादि बोध्यम्। अतो यदि यस्याः कस्याश्चिदभिन्न संख्यायाद्योतकः न धनगतः स्यात्तदा (कोज्या अ + $\sqrt{-१}$ ज्या अ)^{न} = कोज्या न अ + $\sqrt{-१}$ ज्या न अ इदमुपपद्यते। यदा च किल घातमापकः न अभिन्न ऋणगतश्च स्यात्तदा (कोज्या अ + $\sqrt{-१}$ ज्या अ)$^{-न}$ = कोज्या (−न अ) + $\sqrt{-१}$ ज्या (−न अ) = कोज्या न अ − $\sqrt{-१}$ ज्या न अ (१७ प्र. द्र.) = (कोज्या अ − $\sqrt{-१}$ ज्या अ)^{न} इति पूर्वप्रकारेण सिद्धयति।

अथ यदा घातमापको धनगतो भिन्नः $\frac{प}{फ}$ एवं रूपः स्यात् प, फ, धनगावृणगौ वा अभिन्नौ स्याताम्, तदा (कोज्या अ + $\sqrt{-१}$ ज्या अ)$^{\frac{प}{फ}}$ = कोज्या $\frac{प}{फ}$ अ + $\sqrt{-१}$ ज्या $\frac{प}{फ}$ अ। यदा च प, फ, अनयोरेकतरो धनगतोऽपरश्च ऋणगतस्तदा (कोज्या अ + $\sqrt{-१}$ ज्या अ)$^{-\frac{प}{फ}}$ = कोज्या $\frac{प}{फ}$ अ − $\sqrt{-१}$ ज्या $\frac{प}{फ}$ अ। अतो घातमापकस्य भिन्नत्वेऽप्ययं सिद्धान्त उपपद्यते।

अथैतत्सिद्धान्तबलेन कोणस्य ज्याकोटिज्याभ्यां केनद्गुणितस्य तस्य कोणस्य ज्याकोटिज्ययोरानयनम्प्रदश्यते—अत्र किल न संख्यायाधनत्वे कोज्या न अ + $\sqrt{-१}$ ज्या न अ = (कोज्या अ + $\sqrt{-१}$ ज्या अ)^{न} = कोज्या^{न} अ + न. कोज्या$^{न-१}$ अ $\sqrt{-१}$ ज्या अ + $\frac{न(न-१)}{१\cdot२}$ कोज्या$^{न-२}$ अ $\sqrt{-१}^{२}$ ज्या^{२} अ + ... + $\frac{\lfloor न}{१.२.३...न}$ $\sqrt{-१}^{न}$ ज्या^{न} अ.......... (क)

अत्र $\lfloor न$ एतत्स्वरूपेण न संख्यातोऽव्युत्क्रमेणैक संख्यावधि सर्वासां क्रमिक संख्यानां घातः सूच्यते। यथा, $\lfloor ४ = ४ \times ३ \times २ \times १ = २४$।

इयं श्रेढी द्वियुक्पदसिद्धान्तेन सिद्धयति। अत्र कोष्ठान्तर्गत ज्या अ इति द्वितीयपदस्याऽसंभाव्यराशेर्गुणकत्वकल्पनेनोक्तश्रेढयाः प्रथमद्वितीयपदे धनगते, तृतीयचतुर्थपदे ऋणगते, पञ्चमषष्ठपदे धनगते भवत इत्यादि क्रमेण पदानां धनर्णत्वं भवति।

एवं न संख्याया ऋणत्वे कोज्या न अ $-\sqrt{-१}$ ज्या न अ $=$ (कोज्या अ$-\sqrt{-१}$ ज्या अ$)^{न} =$ कोज्या^{न}अ$-$न कोज्या$^{न-१}$अ$\sqrt{-१}$ ज्या अ$+\cdots\cdots$
$\pm\frac{\lfloor न}{१\cdot२\cdot३\cdots न}\sqrt{-१}^{न}$ज्या^{न}अ $\cdots\cdots$(ख)

अत्र न संख्यायाः समत्वे विषमत्वे च क्रमेणान्तिमपदस्योर्ध्वाधरचिह्ने ज्ञेये। एवमत्रापि कोष्ठान्तर्गत द्वितीयपदस्याऽसंभाव्य राशेर्गुणकत्व कल्पनावशात्प्रकृत श्रेढयाः प्रथमपदं धनगतं, द्वितीयतृतीयपदे ऋणगते, चतुर्थ पञ्चमपदे धनगते, इत्यादि क्रमेण पदानां धनर्णत्वं वेदितव्यम्।

अथ (क), (ख), अनयोर्योग करणेन

$$कोज्या\ न\ अ = कोज्या^{न}अ - \frac{न(न-१)}{१.२}कोज्या^{न-२}अ.\ ज्या^{२}अ +$$
$$\frac{न\ (न-१)\ (न-२)\ (न-३)}{१.\ २.\ ३.\ ४}कोज्या^{न-४}अ.\ ज्या^{४}अ - \cdots\cdots$$

इत्यादि योगश्रेढी समुत्पद्यते।

अत्र न संख्याया धनत्वे ऋणत्वेऽपि चैतच्छ्रेढीपद चिह्नानां द्वैविध्यं नोपपद्यते असंभाव्य राशेः २, ४ आदि समघातानां धनत्वात्। तथाचात्र न संख्यायास्समत्वे $\left(\frac{न}{२}+१\right)$ एतावन्ति श्रेढीपदानि भवन्ति, विषमत्वे तु $\left(\frac{न+१}{२}\right)$ एतावन्ति श्रेढीपदानि भवन्ति। एतत्संकलितनियमेन भवतीति ज्ञेयम्।

पुनः (क) अस्मात् (ख) अस्मिन् शोधिते ।

$\pm\sqrt{-१}$ ज्या न अ $= \sqrt{-१}$ ($\pm$न. कोज्या$^{न-१}$अ. ज्या अ $\mp$

$\frac{न (न-१) (न-२)}{१. २. ३}$ कोज्या$^{न-३}$अ. ज्या^{३}अ $\pm$

$\frac{न (न-१) (न-२) (न-३) (न-४)}{१. २. ३. ४. ५}$ कोज्या$^{न-५}$अ. ज्या^{५} अ

$\mp$ ………इत्यादि) अन्तर श्रेढीसमुत्पद्यते ।

अत्र न संख्याया धनत्वे ऋणत्वे च क्रमेणोर्ध्वाधरचिह्ने ज्ञेये असंभाव्यराशेः ३, ५ आदि विषमघातानामृणत्वात् । तथा न संख्यायास्समत्वे $\frac{न}{२}$ मितानि श्रेढीपदानि भवन्ति, विषत्वे तु $\left(\frac{न+१}{२}\right)$ एतावन्ति श्रेढीपदानि भवन्ति ।

अस्योदाहरणानि—अत्र यदि न = २, ३, ४…… इत्यादि स्यात्, तदा $\sqrt{-१}$ ज्यान अ किंवाज्यान अ = ज्या २ अ = २ कोज्या अ.ज्या अ । इदमन्तरश्रेढयाः प्रथमपदेनोत्पद्यते । कोज्या २ अ = कोज्या^{२}अ — ज्या^{२}अ । इदं योगश्रेढयाः प्रथमपदद्वयेन सिद्धयति । ज्या ३ अ = ३ कोज्या^{२}अ. ज्या अ — ज्या^{३}अ । इदमन्तरश्रेढयाः प्रथमपदद्वयेन सिद्धयति । कोज्या ३ अ = कोज्या^{३}अ — ३ कोज्या अ. ज्या^{२}अ = कोज्या^{३} अ — कोज्या अ (१ — कोज्या^{२}अ) = कोज्या^{३}अ — ३ कोज्या अ + ३ कोज्या^{३}अ = ४ कोज्या^{३}अ — ३ कोज्या अ । इद योगश्रेढयाः प्रथमपदद्वयेन सिद्धयति ।

ज्या ४ अ = ४ कोज्या^{३} अ. ज्या अ — ४ कोज्या अ. ज्या^{३} अ । कोज्या ४ अ = कोज्या^{४}अ — ६ कोज्या^{२} अ. ज्या^{२} अ + ज्या^{४} अ ।

एवमग्रेऽप्युक्तश्रढी पदेभ्यएव सर्व सिद्धयति ।

(२) अथैवं कोणस्य स्पर्शरेखातोऽपि केनचिद्गुणितस्य तत्कोणस्य स्पर्श रेखानयनं सुशकम् । तथाहि—

$$\text{स्प न अ} = \frac{\text{ज्या न अ}}{\text{कोज्या न अ}}$$

$$= \frac{\text{न. कोज्या}^{\text{न}-१}\text{अ. ज्या अ} - \frac{\text{न (न}-१)(\text{न}-२)}{१.२.३}\text{कोज्या}^{\text{न}-३}\text{अ.ज्या}^{३}\text{अ इ०}}{\text{कोज्या}^{\text{न}}\text{अ} - \frac{\text{न (न}-१)}{१.२}\text{कोज्या}^{\text{न}-२}\text{अ.ज्या}^{२}\text{अ इ०}}$$

अत्रांशस्य प्रथमादिपदेषु क्रमेण

$\frac{\text{कोज्या अ}}{\text{कोज्या अ}}, \frac{\text{कोज्या}^{३}\text{ अ}}{\text{कोज्या}^{३}\text{ अ}}$ इत्यादिभिर्गुणितेष्वंशस्य प्रत्येकपदस्य $\text{कोज्या}^{\text{न}}\text{अ}$ अयं समान गुणक उत्पद्यते । एवं हरस्य द्वितीयादि पदेषु क्रमेण $\frac{\text{कोज्या}^{२}\text{ अ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{ अ}}$, $\frac{\text{कोज्या}^{४}\text{ अ}}{\text{कोज्या}^{४}\text{ अ}}$ इत्यादिभिर्गुणितेषु हरस्य प्रत्येकपदस्यापि $\text{कोज्या}^{\text{न}}\text{अ}$ अयं समान-गुणक उत्पद्यते । तस्य नाशे कृते स्प न अ =

$$\frac{\text{न. स्प अ} - \frac{\text{न (न}-१)(\text{न}-२)}{१.२.३}\text{स्प}^{३}\text{ अ इ०}}{१ - \frac{\text{न (न}-१)}{१.२}\text{स्प}^{२}\text{ अ इ०}}$$

$$\text{यद्वा स्प न अ} = \frac{\sqrt{-१}\text{ ज्या न अ}}{\sqrt{-१}\text{ कोज्या न अ}} = \frac{१}{\sqrt{-१}} \times$$

$$\left\{\frac{(\text{कोज्या न अ} + \sqrt{-१}\text{ ज्या न अ}) - (\text{कोज्या न अ} - \sqrt{-१}\text{ ज्या न अ})}{(\text{कोज्या न अ} + \sqrt{-१}\text{ ज्या न अ}) + (\text{कोज्या न अ} - \sqrt{-१}\text{ ज्या न अ})}\right\}$$

$$=\frac{१}{\sqrt{-१}}\left\{\frac{(\text{कोज्या अ}+\sqrt{-१}\ \text{ज्या अ})^{\text{न}}-(\text{कोज्या अ}-\sqrt{-१}\ \text{ज्या अ})^{\text{न}}}{(\text{कोज्या अ}+\sqrt{-१}\ \text{ज्या अ})^{\text{न}}(\text{कोज्या अ}-\sqrt{-१}\ \text{ज्या अ})^{\text{न}}}\right\}$$ अस्य

समीकरणदक्षिणपक्षस्यांशहरौ कोज्या अ अनेन भक्तौ,

$$=\frac{१}{\sqrt{-१}}\left\{\frac{(१+\sqrt{-१}\ \text{स्प अ})^{\text{न}}-(१-\sqrt{-१}\ \text{स्प अ})^{\text{न}}}{(१+\sqrt{-१}\ \text{स्प अ})^{\text{न}}+(१+\sqrt{-१}\ \text{स्प अ})^{\text{न}}}\right\}$$

ततो हरांशयो र्द्वियुक्पद सिद्धान्तोत्त्थपदसन्तत्योः क्रमशोयोग वियोग करणेन,

$$=\left\{\frac{\frac{\text{न. स्प अ}}{१}-\frac{\text{न (न}-१)(\text{न}-२)}{१.\ २.\ ३}\times\text{स्प}^{३}\ \text{अ}+\frac{(\text{न}-१)(\text{न}-२)(\text{न}-३)}{१.\ २.\ ३.\ ४.\ ५}\times\text{स्प}^{५}\ \text{अ}\cdots\cdots\text{इत्यादि}}{१-\frac{\text{न (न}-१)}{१.\ २}\times\text{स्प}^{२}\ \text{अ}+\frac{\text{न (न}-१)(\text{न}-२)(\text{न}-३)}{१.\ २.\ ३.\ ४}\times\text{स्प}^{४}\ \text{अ}\quad\text{इत्यादि}}\right\}$$

इयं श्रेढी निष्पद्यते।

अत्रोदाहरणार्थ, यदि, न = १, तदा स्प अ = स्प अ, अत्र हरांशयोः प्रथमं पदमपेक्ष्यते।

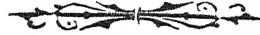
यदि, न = २, तदा स्प २ अ $=\frac{२\ \text{स्प अ}}{१-\text{स्प}^{२}\ \text{अ}}$, अत्र हरस्य प्रथमं पदद्वयं, अंशस्य च प्रथमं पदमपेक्ष्यते।

यदि, न = ३, तदा स्प ३ अ $=\frac{३\ \text{स्प अ}-\text{स्प}^{३}\ \text{अ}}{१-३\ \text{स्प}^{२}\ \text{अ}}$, अत्र हरांशयोः प्रथमं पदद्वयमपेक्ष्यते।

यदि. न = ४, तदा $\text{स्प } ४ \text{ अ} = \frac{४ \text{ स्प अ} - ४ \text{ स्प}^{३} \text{ अ}}{१ - \text{स्प}^{२} \text{ अ} + \text{स्प}^{४} \text{ अ}}$ अत्रहरस्य प्रथमं पदत्रय, अशस्य च प्रथम पदद्वयमपेक्ष्यते ।

यदि, न = ५, तदास्प $५ \text{ अ} = \frac{५ \text{ स्प अ} - १ \ \text{स्प}^{३} \text{ अ} + \text{स्प}^{५} \text{ अ}}{१ - १० \text{ स्प}^{२} \text{अ} + ५ \text{ स्प}^{४} \text{ अ}}$, अत्र हरांशयोः प्रथमं पदत्रयमपेक्ष्यते ।

एवं केनचिद्गुणेन गुणितस्य अ कोणस्य स्पर्शरेखोक्तश्रेढया आवश्यकपदग्रहणेनावगन्तुं शक्यते । स्पर्शरेखाया हराशपरिवर्तनेन कोटिस्पर्शरेखापि ज्ञातु शक्यते ।



प्रश्नोत्तराणां संग्रहः

अभ्यासार्थमुदाहरणानि (१), पृष्ठसंख्या १४–१६,

(१२) कोज्या $=\frac{\sqrt{१५}}{४}$, स्प $=\frac{१}{\sqrt{१५}}$ इत्यादि। (१३) $\frac{३}{५}, \frac{४}{५}$। (१४) $\frac{४०}{९}, \frac{४१}{४०}$। (१५) $\frac{३}{५}, \frac{४}{५}, \frac{३}{५}, \frac{५}{३}$। (१६) $\frac{३}{४}$। (१७) $\frac{१५}{१७}, \frac{८}{१७}$। (१८) $\frac{१}{२}$। (१९) १ किंवा $\frac{३}{५}$। (२०) $\frac{१}{२}$। (२१) $\frac{१}{\sqrt{२}}$ (२२) $१+\sqrt{२}$। (२३) $\frac{२\,\text{य}\,(\text{य}+१)}{२\,\text{य}^{२}+२\,\text{य}+१}$, $\frac{२\,\text{य}+१}{२\,\text{य}^{२}+२\,\text{य}+१}$। (२६) ज्या अ $=\sqrt{१-\text{कोज्या}^{२}\,\text{अ}}$, कोज्या अ, स्प अ $=\frac{\sqrt{१-\text{कोज्या}^{२}\,\text{अ}}}{\text{कोज्या अ}}$, को स्प अ $=\frac{\text{कोज्या अ}}{\sqrt{१-\text{कोज्या}^{२}\,\text{अ}}}$, छे अ $=\frac{१}{\text{कोज्या अ}}$, को छेअ $=\frac{१}{\sqrt{१-\text{कोज्या}^{२}\,\text{अ}}}$। ज्या अ $=\frac{१}{\sqrt{१+\text{को स्प}^{२}\,\text{अ}}}$ कोज्या अ $=\frac{\text{को स्प अ}}{\sqrt{१+\text{को स्प}^{२}\,\text{अ}}}$, स्प अ $=\frac{१}{\text{को स्प अ}}$, कोस्प अ, छे अ $=\frac{\sqrt{१+\text{को स्प}^{२}\,\text{अ}}}{\text{को स्प अ}}$, को छे अ $=\sqrt{१+\text{को स्प}^{२}\,\text{अ}}$।

अभ्यासार्थमुदाहरणानि (२), पृष्ठसंख्या ५७–६०,

(१) $-\frac{१३३}{२०५}, -\frac{८४}{२०५}$। (२) $\frac{\sqrt{३}+१}{२\sqrt{२}}, \frac{\sqrt{३}-१}{२\sqrt{२}}$। (३) $\frac{१४०}{२२१}, \frac{१४०}{१७१}$।

(११) ऋणम् (१२) ऋणम्। (१३) धनम्। (१४) शून्यम्। (१५) धनम्। (१६) धनम्। (१७) धनम् (१८) ऋणम्। (२४) कोज्या २ य—कोज्या १२ य। (२५) ज्या १२ य—ज्या २ य। (२६) कोज्या १४ य+कोज्या ८ य। (२७) कोज्या १२ य—कोज्या १२०।

(३५) ज्या $=\pm\frac{१}{२}\sqrt{२-\sqrt{२}}$, कोज्या $=\pm\frac{१}{२}\sqrt{२+\sqrt{२}}$।

अभ्यासार्थमुदाहरणानि (३), पृष्ठसंख्या ८८–९०,

(१) ८४ । (२) २१६ । (३) ६३० । (४) २७० । (५) १४७० । (७) $\frac{१}{५}$, $\frac{१}{२}$, $\frac{०}{७}$ । (८) $\frac{३}{५}$, $\frac{४}{५}$, १ ।

(९) $\frac{४०}{४१}$, $\frac{२४}{२५}$, $\frac{४३६}{१०२५}$ । $\frac{४}{\sqrt{४१}}$ $\frac{३}{५}$, $\frac{८}{५१\sqrt{४१}}$ । (१०) $\frac{५}{१२}$, $\frac{१२}{५}$, अनन्ता।

(११) $\frac{४}{५}$, $\frac{५६}{६५}$ $\frac{१२}{१३}$ । (१२) $३\sqrt{१०५}$ (=३०.७४ वर्गं हस्ताः) । (१३) $१०\sqrt{७}$ (=२६.४६ व. ह.) ।

(१५) $१\frac{५}{७}$, $२\frac{१}{२}$ ह. । (१७) ७७. ९८ ह । (१८). ५३५६ । (१९) १.७२० व. ह. ।

(२०) १.८८४६···व. ह. । (२१) ४३५.७७ व. ह. । (२२) ३९२७ परिधिः । (२३) ४.९०···व. ह. ।

(२४) १२७° । १९′ । २६″ । (२५) ६ व. ह. ।